Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des exakten 4-Felder-Tests von Fisher-Yates

Jürgen Michalk

1979

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547009_0020

ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG

DER GÜTEFUNKTION DES EXAKTEN 4-FELDER-TESTS

VON FISHER-YATES

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Grades Doctor rerum politicarum

(Dr.rer.pol.)

an der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Jürgen Michalk

1978

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referent:	Prof. Dr. L. Knüsel
Korreferent:	Prof. Dr. K. Weichselberger
Promotionsabschlußberatung:	26. Februar 1979

Gliederung

		Seite
1.	Einführung und Überblick	1
2.	Asymptotische Entwicklungen zur hypergeometrischen Verteilung	10
2.1	Herleitung der Entwicklungen	10
2.2	Anwendungen	24
3.	Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Tests von Fisher-Yates	41
3.1	Herleitung der Entwicklung	41
3.2	Anwendungen	64
4.	Asymptotische Entwicklungen der Gütefunktionen des Sigma-Differenz-Tests und des modifizierten Sigma-Differenz-Tests	85
4.1	Herleitung der Entwicklungen	85
4.2	Anwendungen	92
4.3	Die asymptotischen Defizienzen der Tests	125
Literaturverzeichnis		128
Anhang		130

1. Einführung und Überblick

$X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$ und $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$ seien unabhängige Zufallsgrößen mit

$$P\{X_{1i} = x\} = \begin{cases} p_1 & \text{falls } x = 1 \\ 1-p_1 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \qquad 0<p_1<1 \quad i=1,2,\dots,n_1$$

$$P\{X_{2i} = x\} = \begin{cases} p_2 & \text{falls } x = 1 \\ 1-p_2 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \qquad 0<p_2<1 \quad i=1,2,\dots,n_2.$$

Zu testen ist $p_1 \leq p_2$ gegen $p_1 > p_2$.

Da $(X_1,X_2) = \left(\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}, \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}\right)$ suffizient ist für $(p_1,p_2) \in \Theta = \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0<y_1,y_2<1\}$ (vgl. Witting (1974), S. 136 ff.), kann man sich auf Tests beschränken, die nur von X_1 und X_2 abhängen. Das Testproblem kann dann so formuliert werden:

X_1 und X_2 seien unabhängige binomialverteilte Zufallsgrößen mit den Parametern n_1,p_1 und n_2,p_2. Hypothese und Alternative über den unbekannten Parameter $(p_1,p_2) \in \Theta$ lauten

$$H_o: p_1 \leq p_2$$

$$H_1: p_1 > p_2.$$

Die im folgenden beschriebenen Tests können zur Lösung des Testproblems herangezogen werden. Mit α $(0<\alpha<1)$ bezeichnen wir das vorgegebene Signifikanzniveau, mit $\Omega = \{(k_1,k_2) \in \mathbb{R}^2 \mid k_1,k_2 \in \mathbb{Z};\ 0 \le k_1 \le n_1;\ 0 \le k_2 \le n_2\}$ den Stichprobenraum.

X sei eine hypergeometrisch verteilte Zufallsgröße mit den Parametern m, M und N $(m,M,N \in \mathbb{Z};\ 0 \le m \le N;\ 0 \le M \le N)$, d.h.

$$P\{X = x\} = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{m-x}}{\binom{N}{m}} \qquad \begin{array}{l} x \in \mathbb{Z}, \\ \max(0,m+M-N) \le x \le \min(m,M), \end{array}$$

F die Verteilungsfunktion von X und $q(\gamma,m,M,N)$ das γ-Quantil $(0<\gamma<1)$ von F, d.h.

$$q(\gamma,m,M,N) = \min\{x \in \mathbb{R} \mid F(x-0) \le \gamma \le F(x)\}.$$

Wir setzen $n = n_1+n_2$, $k = k_1+k_2$. Der Test von Fisher-Yates (auch als exakter 4-Felder-Test von Fisher-Yates bezeichnet) ist bestimmt durch den kritischen Bereich

$$K_1 = \{(k_1,k_2) \in \Omega \mid k_1 > q(1-\alpha,k,n_1,n)\}.$$

Für $p_1 = p_2$ erhält man

$$P\{X_1 = k_1 \mid X_1+X_2 = k\} = \frac{\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}}$$

sowie

$$P\{X_1 > q(1-\alpha,k,n_1,n) \mid X_1+X_2 = k\} \le \alpha$$

und mit dem Satz von den totalen Wahrscheinlichkeiten

$$P\{X_1 > q(1-\alpha, X_1+X_2, n_1, n)\} \leq \alpha.$$

Die letzte Ungleichung gilt auch noch für $p_1 \leq p_2$, der Test von Fisher-Yates ist also ein Niveau-α-Test.

Es sei $z(\gamma)$ das γ-Quantil der Standardnormalverteilung. Ein weiterer Test, den wir Sigma-Differenz-Test nennen wollen, ist festgelegt durch den kritischen Bereich

$$(1.1) \qquad K_2 = \{(k_1,k_2) \in \Omega \mid \frac{\frac{k_1}{n_1} - \frac{k_2}{n_2}}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}} > z(1-\alpha)\}^{1)}$$

$$(1.2) \qquad = \{(k_1,k_2) \in \Omega \mid \frac{(k_1n_2-k_2n_1)\sqrt{n}}{\sqrt{n_1n_2k(n-k)}} > z(1-\alpha)\}^{1)}$$

$$(1.3) \qquad = \{(k_1,k_2) \in \Omega \mid k_1 > k\frac{n_1}{n} + z(1-\alpha)\sqrt{\frac{n_1n_2k(n-k)}{n^3}}\}.$$

Der Sigma-Differenz-Test ist kein Niveau-α-Test (vgl. van der Waerden (1971), S. 43 ff.). (1.2) zeigt den Zusammenhang mit dem χ^2-Test; (1.3) stellt die Verbindung her zum Test von Fisher-Yates, $k\frac{n_1}{n} + z(1-\alpha)\sqrt{\frac{n_1n_2k(n-k)}{n^3}}$ ist nämlich die übliche Approximation[2)] von $q(1-\alpha,k,n_1,n)$ durch die Normalverteilung.

---

1) $(0,0), (n_1,n_2) \notin K_2$

2) bis auf $n^2(n-1)$ statt n^3 im Nenner der Wurzel

Der bestmögliche Test zu unserem Testproblem ist der randomisierte Test von Fisher-Yates. Er ist unter allen unverfälschten Tests zum Niveau α der gleichmäßig mächtigste (vgl. Lehmann (1959), S. 140 ff.). Er ist charakterisiert durch die Testfunktion

$$\psi_1(k_1,k_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k_1 > q \\ \delta & \text{falls } k_1 = q \\ 0 & \text{falls } k_1 < q \end{cases} \qquad (k_1,k_2) \in \Omega,$$

wobei $q = q(1-\alpha,k,n_1,n)$ gesetzt ist; $\delta = \delta(1-\alpha,k,n_1,n)$ wird bestimmt aus

$$(1.4) \qquad \sum_{i=q+1}^{\min(k,n_1)} \frac{\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i}}{\binom{n}{k}} + \delta \frac{\binom{n_1}{q}\binom{n_2}{k-q}}{\binom{n}{k}} = \alpha.$$

Es sei

$$(1.5) \qquad q^0 = q^0(1-\alpha,k,n_1,n) = q(1-\alpha,k,n_1,n) + \tfrac{1}{2} - \delta(1-\alpha,k,n_1,n),$$

dann gilt:

$$(1.6) \qquad \psi_1(k_1,k_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k_1 \geq q^0 + \frac{1}{2} \\ k_1 + \frac{1}{2} - q^0 & \text{falls } |k_1 - q^0| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{falls } k_1 \leq q^0 - \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (k_1,k_2) \in \Omega.$$

Diese Darstellung mit q^0 statt q und δ ist für unsere weiteren Überlegungen in den Abschnitten 2 und 3 bequemer; außerdem wird sofort der Zusammenhang zu den beiden folgenden Tests ersichtlich, die Näherungen dieses bestmöglichen Tests darstellen.

Es sei $\Delta_1 = \Delta_1(1-\alpha,k,n_1,n) = k\,\frac{n_1}{n} + z(1-\alpha)\sqrt{\frac{n_1 n_2 k(n-k)}{n^3}}$. Wie wir in Abschnitt 2 sehen werden, ist Δ_1 eine Approximation für q^0. Es liegt nahe, folgenden Test zu definieren:

$$(1.7)\qquad \psi_2(k_1,k_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k_1 \geq \Delta_1 + \frac{1}{2} \\ k_1 + \frac{1}{2} - \Delta_1 & \text{falls } |k_1 - \Delta_1| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{falls } k_1 \leq \Delta_1 - \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (k_1,k_2) \in \Omega.$$

Diesen Test wollen wir randomisierten Sigma-Differenz-Test nennen. Für den kritischen Bereich K_2 des Sigma-Differenz-Tests gilt nämlich $K_2 = \{(k_1,k_2) \in \Omega \mid \psi_2(k_1,k_2) > \frac{1}{2}\}$. Es ist anzunehmen, daß die Gütefunktionen beider Tests nur wenig voneinander abweichen.

Sucht man für q^0 eine bessere Approximation als Δ_1 und definiert damit einen Test analog zu (1.7), so "nähert" man sich dem Test von Fisher-Yates weiter. $\Delta_2 = \Delta_2(1-\alpha,k,n_1,n) = \Delta_1 + \frac{1}{6}(z^2(1-\alpha)-1)(1-2\frac{k}{n})(1-2\frac{n_1}{n})$ ist eine bessere Näherung für q^0, wie in Abschnitt 2 gezeigt wird. Den darauf beruhenden Test wollen wir randomisierten modifizierten Sigma-Differenz-Test nennen. Er ist definiert durch folgende Testfunktion

$$\psi_3(k_1,k_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k_1 \geq \Delta_2 + \frac{1}{2} \\ k_1 + \frac{1}{2} - \Delta_2 & \text{falls } |k_1 - \Delta_2| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{falls } k_1 \leq \Delta_2 - \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (k_1,k_2) \in \Omega.$$

Berchtold (1972) hat für eine Verbesserung des χ^2-Tests zum Vergleich zweier Wahrscheinlichkeiten ebenfalls die Korrektur

$\frac{1}{6}(z^2(1-\alpha)-1)(1-2\frac{k}{n})(1-2\frac{n_1}{n})$ vorgeschlagen.

Die Beurteilung einzelner Tests, besonders aber der Vergleich konkurrierender Tests, geschieht hauptsächlich durch die Beurteilung und den Vergleich der Gütefunktionen der Tests. Leider existieren zu den oben erwähnten Tests keine für praktische Anwendungen brauchbare Darstellungen der Gütefunktionen. Man kann nun durch Berechnung einzelner Funktionswerte versuchen, Einblick in den Verlauf der Gütefunktionen zu erhalten (vgl. Bennett und Hsu (1960)). Die Gütefunktionswerte hängen aber von n_1, n_2, p_1, p_2 und α ab. Es ist unmöglich, alle interessierenden Situationen wenigstens einigermaßen befriedigend zu erfassen und die Ergebnisse der Berechnungen zu tabellieren oder graphisch darzustellen. In der Literatur wurde deshalb der Versuch unternommen, Näherungen für einige der oben genannten Gütefunktionen zu finden (vgl. Patnaik (1948), Sillitto (1949)). Diese Näherungen wurden gewonnen durch geeignete Grenzübergänge der Variablen n_1, n_2, p_1, p_2 und α. Eine Weiterentwicklung dieser Methode führt zu asymptotischen Entwicklungen von Gütefunktionen.

Die übliche Definition der asymptotischen Entwicklung einer Funktion (vgl. z.B. Erdélyi (1956), S. 11 ff.) ist für unsere Zwecke zu eng und muß folgendermaßen verallgemeinert werden (vgl. z.B. Berg (1968), S. 32 ff.):

$g(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha)$ sei die Gütefunktion zu einem der oben aufgeführten Tests. n_1, n_2, p_1, p_2 und α mögen einem Grenzprozeß (*) unterliegen; dabei gelte $s \xrightarrow[(*)]{} \infty$ für eine geeignete Variable $s = s(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha)$. $g(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha)$ besitzt beim

Grenzübergang (*) eine asymptotische Entwicklung der Ordnung r ($r \in \mathbb{N}$) bezüglich der asymptotischen Skala $(s^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$, wenn Funktionen $f_i(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha)$ $i=0,1,\ldots,r$ existieren, so daß für $k=0,1,\ldots,r$ gilt:

$$s^k \left\{ g(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha) - \sum_{i=0}^{k} \frac{f_i(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha)}{s^i} \right\} \xrightarrow[(*)]{} 0.$$

Dies wird im folgenden abgekürzt durch

$$(1.8) \qquad g(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha) = \sum_{i=0}^{r} \frac{f_i(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha)}{s^i} + o(s^{-r}) \quad s \to \infty,$$

auch wenn der Grenzprozeß (*) durch $s \to \infty$ nicht vollständig beschrieben wird. Ist eindeutig, welcher Grenzprozeß gemeint ist, so wird $s \to \infty$ weggelassen. Was hier am Beispiel der Gütefunktion erklärt wurde, ist sinngemäß auf alle unten vorkommenden asymptotischen Entwicklungen zu übertragen. Die Grenzprozesse werden stets so eingeschränkt, daß die Entwicklungen gleichmäßig gelten.

Asymptotische Entwicklungen verfeinern und vertiefen die üblichen Grenzwertbetrachtungen. Das Glied $\frac{1}{s} f_1(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha)$ der Entwicklung (1.8) gibt Anhaltspunkte, in welchen Situationen der Fehler der Näherung $f_0(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha)$ besonders groß ist und wie groß er höchstens werden kann. Durch Hinzunahme von $\frac{1}{s} f_1(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha)$ und weiteren Gliedern kleinerer Ordnung wird oft schon bei kleinem s der Fehler korrigiert und eine verbesserte Approximation erreicht; das nächste Glied kleinerer Ordnung, das nicht zur Näherung herangezogen wird, gibt wieder Aufschluß über das Fehlerverhalten der Näherung.

Alle fünf oben beschriebenen Tests besitzen die gleiche asymptotische Gütefunktion; als Maßstab für den Vergleich ist sie daher zu grob. Durch asymptotische Entwicklungen werden die einzelnen Tests wieder "getrennt".

Bisher ist nur eine asymptotische Entwicklung der Ordnung 1 zur Gütefunktion des randomisierten Tests von Fisher-Yates bestimmt worden (vgl. Albers (1974), S. 8 ff.). Diese Entwicklung behandelt p_1 und p_2 aber nicht symmetrisch; außerdem macht sie noch nicht die Wirkung der Randomisierung sichtbar, dies leistet erst eine Entwicklung der Ordnung 2. Asymptotische Entwicklungen von Gütefunktionen, die Randomisierungseffekte wiedergeben, sind erst in zwei Fällen bekannt (vgl. Albers (1974), S. 55 ff.; Knüsel (1978)).

In dieser Arbeit werden asymptotische Entwicklungen der Ordnung 2 zu den Gütefunktionen des randomisierten Tests von Fisher-Yates (Abschnitt 3), des randomisierten Sigma-Differenz-Tests (Abschnitt 4) und des randomisierten modifizierten Sigma-Differenz-Tests (Abschnitt 4) hergeleitet und diskutiert. Die Beschränkung auf die randomisierten Tests hat zwei Gründe. Der randomisierte Test von Fisher-Yates ist der beste überhaupt mögliche Test. Die Ergebnisse, die aus den Untersuchungen über die allgemeineren randomisierten Tests gewonnen werden, dienen als Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen der nicht randomisierten Tests. Da von jetzt an nur noch randomisierte Tests behandelt werden, wird der Zusatz "randomisiert" im folgenden weggelassen.

Zum Vergleich der Macht der Tests werden in Abschnitt 4.3 die asymptotischen Defizienzen berechnet. Die Tests hängen von q^0 oder Näherungen von q^0 ab; diese werden im Abschnitt 2 hergeleitet und untersucht. Zu den gewonnenen Näherungen werden in den Abschnitten 2.2, 3.2 und 4.2 einige numerische Berechnungen

angegeben, die auf den Rechnern Telefunken TR 440 und Cyber 175 des Leibniz-Rechenzentrums der Bayerischen Akademie der Wissenschaften durchgeführt wurden. Im Anhang sind einige Zwischenergebnisse der Beweise zu den Sätzen 4, 5 und 6 tabelliert.

2. Asymptotische Entwicklungen zur hypergeometrischen Verteilung

2.1 Herleitung der Entwicklungen

X sei eine hypergeometrisch verteilte Zufallsgröße mit den Parametern m, M, N. Es gilt $E(X) = \mu = m\frac{M}{N}$ und $Var(X) = \sigma_H^2 = m\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-m}{N-1}$. Φ und ϕ seien die Verteilungsfunktion und die Dichte der Standardnormalverteilung, H die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße $\frac{X-\mu}{\sigma_H}$ $(\sigma_H > 0)$. H(x) konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ genau dann gegen $\Phi(x)$, wenn $\sigma_H \to \infty$ (vgl. v.Eeden und Runnenberg (1960)).

Aussagen über die Art und Geschwindigkeit der Konvergenz dieses Grenzüberganges werden durch die asymptotische Entwicklung der Verteilungsfunktion gewonnen.

Satz 1:

Sei X eine hypergeometrisch verteilte Zufallsgröße mit den Parametern m, M und N, $\mu = m\frac{M}{N}$, $\tau^2 = m\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-m}{N}$ $(\tau > 0)$ [1], G die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße $\frac{X-\mu}{\tau}$ und $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k-\mu+\frac{1}{2}}{\tau},\ k \in \mathbb{Z}\}$. Dann gilt für $\tau \to \infty$

$$(2.1) \qquad G(x) = \Phi(x) + \sum_{i=1}^{r} \frac{\phi(x)A_i(x)}{\tau^i} + o(\tau^{-r}) \qquad x \in L;$$

---

1) τ statt σ_H vereinfacht die Berechnungen (vgl. Molenaar (1973), S. 116 ff.).

dabei sind die A_i Polynome in x mit Koeffizienten, die von m, M und N abhängen; insbesondere gilt

$$A_1(x) = \frac{a}{6}(1-x^2)$$

$$A_2(x) = \frac{1}{72}\left(-(1-4b+16c)x^5+(7-22b+70c)x^3-3(1-2b+2c)x\right)$$

$$A_3(x) = \frac{a}{6480}\left(-5(1-4b+16c)x^8+5(19-58b+178c)x^6\right.$$
$$-6(64-133b+271c)x^4+3(43-46b+22c)x^2$$
$$\left.+3(41-2b-46c)\right)$$

wobei

$$a = \frac{N-2m}{N}\,\frac{N-2M}{N}$$

$$b = \frac{m}{N}\,\frac{N-m}{N} + \frac{M}{N}\,\frac{N-M}{N}$$

$$c = \frac{m}{N}\,\frac{N-m}{N}\,\frac{M}{N}\,\frac{N-M}{N}.$$

Die Herleitung bis zu einem Restglied der Ordnung $o(\tau^{-2})$ findet man bei Molenaar (1973), S. 120 ff.. Verwendet wurden dabei die Beziehungen

$$\phi^{(1)}(x) = -x\phi(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\phi^{(2)}(x) = (x^2-1)\phi(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\phi^{(3)}(x) = -(x^3-3x)\phi(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Allgemein gilt für die n-te Ableitung von ϕ die Darstellung

$$(2.2) \qquad \phi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\phi(x) \qquad x \in \mathbb{R},\ n \geq 1$$

mit dem Hermiteschen Polynom n-ten Grades H_n (vgl. Feller (1971), S. 532 f.). (2.2) wird in den Beweisen der Sätze 2 - 6 ohne besonderen Hinweis benutzt.

Für $0 \leq x < 1$ sei

$$g_0(x) = 1$$

$$\frac{d}{dx} g_n(x) = g_{n-1}(x) \qquad \text{mit } \int_0^1 g_n(x)dx = 0 \qquad n \geq 1.$$

Die periodischen Funktionen

$$P_n(x) = g_n(x-[x]) - g_n(0)^{1)} \qquad x \in \mathbb{R},\ n \geq 1$$

werden in allen weiteren Überlegungen eine entscheidende Rolle spielen. Für $0 \leq x < 1$ erhält man z.B.:

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$$

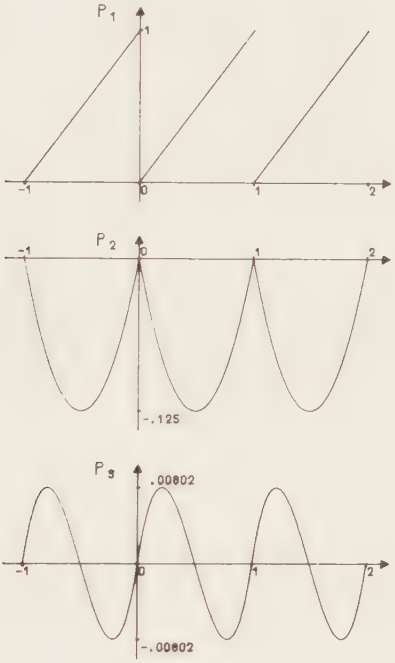
$$P_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} .$$

---

1) $[x]$ ist die größte ganze Zahl, die x nicht übersteigt

Die Graphen der Funktionen P_1, P_2 und P_3 sind in Figur 1 im Intervall $[-1,2)$ gezeichnet.

Figur 1:



Folgende Eigenschaften der Funktionen P_n sind für uns wichtig (vgl. Knopp (1964), S. 540 ff.):

(2.3) $P_n(x) = 0$ für $x \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$

(2.4) P_n ist gleichmäßig stetig für $n \geq 2$

(2.5) P_n ist $(n-2)$-mal stetig differenzierbar für $n \geq 3$

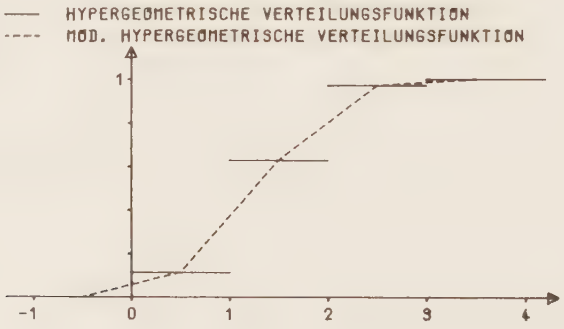
(2.6) P_n ist darstellbar als Polynom in P_1, $n \geq 1$.

Sei X eine hypergeometrisch verteilte Zufallsgröße mit den Parametern m, M und N, F die zugehörige Verteilungsfunktion. Wir betrachten die folgende modifizierte Verteilungsfunktion

$$(2.7) \qquad F^0(x) = F(x-\tfrac{1}{2}) + P_1(x-\tfrac{1}{2})(F(x+\tfrac{1}{2}) - F(x-\tfrac{1}{2})) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

F^0 ist stetig und stückweise linear. Für Argumente $x = k+\frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, stimmen F und F^0 überein. Für m=3, M=3, N=7 sind die Graphen von F und F^0 in Figur 2 gezeichnet.

Figur 2:



$q = q(\gamma,m,M,N)$ und $q^0 = q^0(\gamma,m,M,N)$ seien die γ-Quantile von F bzw. F^0, dann gilt

$$(2.8) \qquad q^0(\gamma,m,M,N) = q(\gamma,m,M,N) + \tfrac{1}{2} - \delta(\gamma,m,M,N)$$

wobei $\delta = \delta(\gamma,m,M,N)$ bestimmt wird aus

$$(2.9) \qquad P\{X > q\} + \delta P\{X = q\} = 1 - \gamma.$$

(2.8) und (2.9) sind bis auf die Bezeichnungen identisch mit (1.5) und (1.4). F^0 besitzt unser Interesse, da das γ-Quantil q^0 von F^0 in der Darstellung (1.6) der Testfunktion ψ_1 des Tests von Fisher-Yates vorkommt.

Die folgenden Bezeichnungen gelten für den ganzen Abschnitt 2. X sei eine hypergeometrisch verteilte Zufallsgröße mit den Parametern m, M und N, F die zugehörige Verteilungsfunktion, X^0 eine Zufallsgröße mit der in (2.7) definierten Verteilungsfunktion F^0, $\mu = m\frac{M}{N}$, $\tau^2 = m\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-m}{N}$[1], G die Verteilungsfunktion von $\frac{X-\mu}{\tau}$ und G^0 die Verteilungsfunktion von $\frac{X^0-\mu}{\tau}$.

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, die asymptotische Entwicklung für das γ-Quantil der Verteilungsfunktion G^0 herzuleiten; dazu ist es notwendig, die Entwicklung von G^0 selbst zu kennen.

Satz 2:

Es gilt für $\tau \longrightarrow \infty$

$$(2.10) \qquad G^0(x) = \Phi(x) + \sum_{i=1}^{r} \frac{\phi(x)B_i(x)}{\tau^i} + o(\tau^{-r}) \qquad x \in \mathbb{R};$$

dabei sind die B_i Polynome in x und $P_n(\mu+x\tau+\frac{1}{2})$ $(n \geq 2)$ mit Koeffizienten, die von m, M und N abhängen; insbesondere ist

---

1) stets wird $\tau > 0$ vorausgesetzt

$$B_1(x) = A_1(x)$$

$$B_2(x) = A_2(x) + xP_2(\mu+x\tau+\tfrac{1}{2})$$

$$B_3(x) = A_3(x) + \tfrac{a}{6}(x^4-6x^2+3)P_2(\mu+x\tau+\tfrac{1}{2})$$

$$+ 2(x^2-1)P_3(\mu+x\tau+\tfrac{1}{2})$$

mit $A_1(x)$, $A_2(x)$, $A_3(x)$ und a wie in Satz 1.

Beweis:

Sei $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k-\mu+\frac{1}{2}}{\tau},\ k \in \mathbb{Z}\}$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$G^0(x) = G^0(w) + P_1(\mu+x\tau+\tfrac{1}{2})\left[G^0(w+\tfrac{1}{\tau}) - G^0(w)\right]$$

mit $w = x - \frac{1}{\tau}P_1(\mu+x\tau+\frac{1}{2})$. Da G und G^0 auf L identisch sind und da w, $w + \frac{1}{\tau} \in L$, erhält man

$$G^0(x) = G(w) + P_1(\mu+x\tau+\tfrac{1}{2})\left[G(w+\tfrac{1}{\tau}) - G(w)\right].$$

Mit (2.1) folgt dann die Behauptung des Satzes.

Die Entwicklung (2.10) ist eine Verallgemeinerung der Entwicklung (2.1). Für $x \in L$ gilt nämlich $P_n(x) = 0 \quad (n \geq 2)$, und beide Entwicklungen sind identisch.

Satz 3:

Sei $q_1^0(\gamma,m,M,N)$ das γ-Quantil von G^0, $z = z(\gamma)$ das γ-Quantil von Φ. Existieren $\varepsilon_1,\varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varepsilon_1 \le \gamma \le \varepsilon_2 < 1$, dann gilt für $\tau \to \infty$

$$(2.11) \qquad q_1^0(\gamma,m,M,N) = z + \sum_{i=1}^{r} \frac{C_i(z)}{\tau^i} + o(\tau^{-r});$$

dabei hängen die C_i ab von z, m, M, N und den Funktionen P_n $(n \ge 2)$; insbesondere ist

$$C_1(z) = \frac{a}{6}(z^2-1)$$

$$C_2(z) = R_1(z) - zP_2(u)$$

$$C_3(z) = R_2(z) - 2(z^2-1)P_3(u) + \frac{a}{3}(z^2-1)P_2(u)$$

$$- z\tau\left(P_2(u+\tfrac{1}{\tau}C_2(z)) - P_2(u)\right)$$

wobei

$$R_1(z) = \frac{1}{72}\left((-1-2b+26c)z^3 + (-2+14b-74c)z\right)$$

$$R_2(z) = \frac{a}{1620}\left(3(2+b+23c)z^4 + (14+7b-379c)z^2\right.$$

$$\left. - 4(8+4b-43c)\right)$$

$$u = \mu + z\tau + \frac{1}{2} + C_1(z),$$

a, b und c wie in Satz 1.

Beweis:

Sei Ψ die inverse Funktion zu Φ. Ψ ist beliebig oft stetig differenzierbar; für γ ($\varepsilon_1 \le \gamma \le \varepsilon_2$) erhält man z.B.

$$\Psi^{(1)}(\gamma) = \frac{1}{\phi(z)}$$

$$\Psi^{(2)}(\gamma) = \frac{z}{\phi^2(z)}$$

$$\Psi^{(3)}(\gamma) = \frac{2z^2+1}{\phi^3(z)} .$$

Vorübergehend setzen wir $q = q_1^0(\gamma,m,M,N)$. Sei $\beta = \Phi(q)$, dann gilt für $\beta \to \gamma$

$$(2.12) \qquad q = z + \sum_{k=1}^{r} \frac{(\beta-\gamma)^k}{k!} \Psi^{(k)}(\gamma) + o((\beta-\gamma)^r)$$

Für $\tau \to \infty$ folgt aus Satz 2

$$\beta - \gamma = \Phi(q) - G^0(q) = - \sum_{k=1}^{r} \frac{\phi(q) B_k(q)}{\tau^k} + o(\tau^{-r})$$

und damit aus (2.12)

$$(2.13) \qquad q = z + \sum_{k=1}^{r} \frac{S_k(z,q)}{\tau^k} + o(\tau^{-r})$$

wobei die S_k Polynome in $\frac{\phi(q)}{\phi(z)}$, z, q und $P_n(\mu+q\tau+\frac{1}{2})$ $(n \ge 2)$ sind.

Entwickelt man $\phi(q) = \phi\left\{z + \sum_{k=1}^{r} \frac{S_k(z,q)}{\tau^k} + o(\tau^{-r})\right\}$ um z

und ersetzt q, sofern q nicht im Argument der Funktion P_n vorkommt, durch die rechte Seite von (2.13), so erhält man durch sukzessive Anwendung dieses Schrittes

$$q = z + \sum_{k=1}^{r} \frac{T_k(z,q)}{\tau^k} + o(\tau^{-r}) ,$$

wobei die T_k Polynome in z und $P_n(\mu+q\tau+\frac{1}{2})$ $(n \geq 2)$ sind; insbesondere findet man

$$T_1(z,q) = C_1(z)$$

$$T_2(z,q) = R_1(z) - zP_2(\mu+q\tau+\tfrac{1}{2})$$

$$T_3(z,q) = R_2(z) - 2(z^2-1)P_3(\mu+q\tau+\tfrac{1}{2})$$

$$+ \tfrac{a}{3}(z^2-1)P_2(\mu+q\tau+\tfrac{1}{2});$$

C_1, R_1, R_2 und a sind definiert wie oben.

Ist P_n (r-k)-mal stetig differenzierbar $(k=2,3,\ldots,r)$, so gilt:

$$P_n(\mu+q\tau+\tfrac{1}{2}) = P_n(u) + \sum_{i=1}^{r-k} \frac{1}{i!}\left(\sum_{j=1}^{r-k} \frac{T_{j+1}(z,q)}{\tau^j}\right)^i P_n^{(i)}(u)$$

$$+ o(\tau^{-(r-k)})$$

mit $u = \mu + z\tau + \frac{1}{2} + C_1(z)$.

Ist P_n nicht (r-k)-mal stetig differenzierbar, so gilt

$$P_n(\mu+q\tau+\tfrac{1}{2}) = P_n(u) + \sum_{i=1}^{r-k} \frac{U_i(q,z)}{\tau^i} + o(\tau^{-(r-k)})$$

mit

$$U_i(q,z) = \tau^i\left(P_n(u + \sum_{j=1}^{i} \frac{T_{j+1}(z,q)}{\tau^j}) - P_n(u + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{T_{j+1}(z,q)}{\tau^j})\right)$$

und u wie oben. $U_i(q,z)$ ist beschränkt für $\tau\to\infty$, da der Ausdruck in Klammer wegen (2.4) von der Ordnung $O(\tau^{-i})$ ist. Wir können also in jedem Fall $P_n(\mu+q\tau+\frac{1}{2})$ durch $P_n(u)$ und Glieder kleinerer Ordnung ersetzen. Sukzessive Anwendung dieses Schrittes liefert die Behauptung des Satzes.

Beschränken wir uns in Satz 3 auf γ-Quantile von G^0 mit $q_1^0(\gamma,m,M,N) = \frac{k-\mu-\frac{1}{2}}{\tau}$, $k \in \mathbb{Z}$, dann folgt aus (2.11) $u = k + o(1)$ und damit aus (2.3) $P_2(u) = o(1)$. Als Spezialfall von (2.11) erhält man so die schon bekannte Entwicklung (vgl. Molenaar (1973), S. 124)

$$\frac{k-\mu-\frac{1}{2}}{\tau} = z + \frac{C_1(z)}{\tau} + \frac{R_1(z)}{\tau^2} + o(\tau^{-2}).$$

Für $\frac{m}{N} \longrightarrow 0$, τ und $p = \frac{M}{N}$ $(0 < p < 1)$ konstant konvergiert X in Verteilung gegen eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern p und $n = \frac{\tau^2}{p(1-p)}$ (vgl. v. Eeden und Runnenberg (1960)). Nehmen wir für C_1, C_2 und C_3 in (2.11) diesen Grenzübergang vor und setzen $\sigma^2 = np(1-p)$, so erhalten wir die folgende "asymptotische Entwicklung":

$$(2.14) \qquad q_2^0(\gamma,n,p) = z + \sum_{i=1}^{3} \frac{D_i(z)}{\sigma^i} + o(\sigma^{-3})$$

wobei

$$D_1(z) = \frac{1-2p}{6}(z^2-1)$$

$$D_2(z) = S_1(z) - zP_2(v)$$

$$D_3(z) = S_2(z) - 2(z^2-1)P_3(v) + \frac{1-2p}{3}(z^2-1)P_2(v)$$

$$- z\,\sigma\left(P_2\left(v+\frac{1}{\sigma}D_2(z)\right) - P_2(v)\right)$$

$$S_1(z) = \frac{1}{72}\{(-1-2p(1-p))z^3 + (-2+14p(1-p))z\}$$

$$S_2(z) = \frac{1-2p}{1620}\{3(2+p(1-p))z^4 + (14+7p(1-p))z^2$$

$$- 4(8+4p(1-p))\}$$

$$\gamma = np + z\sigma - \frac{1}{2} + D_1(z).$$

(2.14) ist für $\sigma \to \infty$ die korrekte asymptotische Entwicklung des γ-Quantils $q_2^*(\gamma,n,p)$ einer wie in (2.7) modifizierten und standardisierten Binomialverteilung mit den Parametern n und p. Knüsel [1972] hat (2.14) bis zu einem Restglied der Ordnung $o(\sigma^{-2})$ (für $p \neq 0.5$ bis zu einem Restglied der Ordnung $o(\sigma^{-3})$) hergeleitet. Sein Beweis ist jedoch aufwendig durch Fallunterscheidungen, die das Ergebnis unübersichtlich machen. Deshalb ist nicht sofort zu erkennen, daß $D_2(z)$ identisch ist mit seinem Term

$$- \frac{1}{72}\{(1-2p)^2 z^5 - (1-10p(1-p))z^3 - 3(1+6p(1-p))z\}$$

$$- zD_1(z)\{P_1(np+z\sigma+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}\} - z\{P_2(np+z\sigma+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{12}\}$$

$$- jz\{D_1(z) + P_1(np+z\sigma+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2} - \tfrac{j}{2}\}$$

mit $j = [v] - [np + z\sigma + \frac{1}{2}]$. Ersetzt man $[x]$ durch $x - P_1(x)$ und vereinfacht, so erhält man die notwendige Übereinstimmung.

Für $\frac{m}{N} \to 0$, $\frac{M}{N} \to 0$ und τ konstant, konvergiert X in Verteilung gegen eine poissonverteilte Zufallsgröße mit dem Parameter $\lambda = \tau^2$ (vgl. v. Eeden und Runnenberg (1960)). Nehmen wir für C_1, C_2 und C_3 in (2.11) diesen Grenzübergang vor, so erhalten wir die "asymptotische Entwicklung"

$$(2.15) \qquad q_3^*(\cdot,\cdot) = z + \sum_{i=1}^{3} \frac{E_i(z)}{\lambda^{\frac{i}{2}}} + o(\lambda^{-\frac{3}{2}})$$

wobei

$$E_1(z) = \frac{1}{6}(z^2-1)$$

$$E_2(z) = T_1(z) - zP_2(w)$$

$$E_3(z) = T_2(z) - 2(z^2-1)P_3(w) + \frac{1}{3}(z^2-1)P_2(w)$$

$$- z\sqrt{\lambda}\left(P_2\left(w+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}E_2(z)\right) - P_2(w)\right)$$

$$T_1(z) = \frac{1}{72}(-z^3-2z)$$

$$T_2(z) = \frac{1}{1620}(6z^4+14z^2-32)$$

$$w = \lambda + z\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2} + E_1(z).$$

(2.15) ist für $\lambda \to \infty$ die korrekte asymptotische Entwicklung des γ-Quantils $q_3^0(\gamma,\lambda)$ einer wie in (2.7) modifizierten und standardisierten Poissonverteilung mit dem Parameter λ. Knüsel (1972) hat (2.15) bis zu einem Restglied der Ordnung $o(\lambda^{-1})$ berechnet. Sein Ergebnis ist identisch mit unserem, seine Darstellung von $E_2(z)$ jedoch wieder komplizierter.

2.2 Anwendungen

Mit (1.6) haben wir eine Darstellung der Testfunktion des Tests von Fisher-Yates angegeben, die von der Variablen $q^0 = q^0(\gamma,m,M,N)$ abhängt. Für q^0 hat man aus Satz 3 wegen $q^0(\gamma,m,M,N) = \mu + \tau q_1^0(\gamma,m,M,N)$ vier Näherungen $\Delta_i = \Delta_i(\gamma,m,M,N)$ $i = 1,2,3,4$ zur Verfügung

$$\Delta_1 = \mu + z\tau$$

$$\Delta_2 = \mu + z\tau + C_1(z)$$

$$\Delta_3 = \mu + z\tau + C_1(z) + \frac{1}{\tau}C_2(z)$$

$$\Delta_4 = \mu + z\tau + C_1(z) + \frac{1}{\tau}C_2(z) + \frac{1}{\tau^2}C_3(z)$$

mit C_1, C_2 und C_3 wie in Satz 3. Ersetzt man beim Test von Fisher-Yates q^0 durch Δ_1 bzw. Δ_2, so gelangt man zum Sigma-Differenz-Test bzw. zum modifizierten Sigma-Differenz-Test.

Δ_1 ist bis auf den Faktor τ statt $\tau\sqrt{\frac{N}{N-1}}$ die übliche Näherung mit der Normalverteilung. Δ_1 garantiert aber noch nicht, daß der Approximationsfehler gegen Null geht, auch wenn τ beliebig groß wird. Dies leistet erst die Näherung Δ_2. Sie ist immer noch einfach und kann mit den üblichen Tafeln der Standardnormalverteilung berechnet werden. Sind höhere Anforderungen an die Genauigkeit gestellt, so wird man zu Δ_3 oder Δ_4 übergehen, deren zusätzliche Terme z.B. schon für $\tau = 3$ die Fehler beträchtlich verringern. Leider sind diese Näherungen so kompliziert, daß sie nicht mehr von Hand berechnet werden können.

Einen Eindruck von der Wirksamkeit der vier Näherungen geben die Tabellen 2 - 13. Die dort erfaßten Parameterkonstellationen sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Tab. 1:

m	M	N	$\frac{m}{N}$	$\frac{M}{N}$	τ
72	72	144	0,5	0,5	3
288	288	576	0,5	0,5	6
48	96	192	0,25	0,5	3
192	384	768	0,25	0,5	6
40	200	400	0,1	0,5	3
160	800	1600	0,1	0,5	6
60	75	300	0,2	0,25	3
240	300	1200	0,2	0,25	6
52	169	676	0,077	0,25	3
208	676	2704	0,077	0,25	6
110	121	1210	0,091	0,1	3
440	484	4840	0,091	0,1	6

Der Aufbau der Tabellen 2 - 13 ist stets gleich. In Spalte 1 finden sich einige ausgewählte Werte von γ, in Spalte 2 die zugehörigen γ-Quantile q^0. In den Spalten 3, 5, 7 und 9 sind die Werte von Δ_1, $C_1(z)$, $\frac{1}{\tau}C_2(z)$ und $\frac{1}{\tau^2}C_3(z)$. In den Spalten 4, 6, 8 und 10 stehen die Differenzen der beiden vorangegangenen Spalten, d. h. die Fehler der Näherungen Δ_1, Δ_2, Δ_3 und Δ_4. Die Werte in den Spalten 4 - 10 sind in Einheiten der fünften Dezimalstelle nach dem Komma angegeben.

Wir überlegen uns, welche absoluten Fehler bei den Näherungen Δ_1 und Δ_2 höchstens auftreten können. Anhaltspunkte dafür erhoffen wir von den asymptotischen Fehlern $C_1(z)$ und $\frac{1}{\tau}C_2(z)$, denn mit wachsendem τ werden die Differenzen zwischen tatsächlichen und asymptotischen Fehlern immer geringer. Die Abschätzungen sollen für γ, m, M und N mit $\tau \geq 3$ und $0{,}0005 \leq \gamma \leq 0{,}9995$ (d. h. $|z| \leq 3{,}2905$) gegeben werden.

Extremum von $C_1(z)$ ($|z| \leq 3{,}2905$) ist 1,6379. Es wird z.B. angenommen für $\frac{m}{N} = \frac{M}{N} = 0$ und $z = -3{,}2905$. Die Fehler für einige kleine Werte von $\frac{m}{N}$ und $\frac{M}{N}$, $\gamma = 0{,}0005$ und $\tau = 3$ sind in Tabelle 14 aufgeführt.

Tab. 14:

$\frac{m}{N} = \frac{M}{N}$	$q^0 - \Delta_1$
0,00100	1,7036
0,00050	1,7071
0,00010	1,7099
0,00005	1,7103
0,00001	1,7106

$\frac{m}{M} \longrightarrow 0$, $\frac{M}{N} \longrightarrow 0$, τ konstant sind Voraussetzungen zum Grenzübergang zur Poissonverteilung. Es ist deshalb klar, daß sich $q^0 - \Delta_1$ in Tabelle 14 dem Fehler nähert, der entsteht, wenn das analog zu q^0 definierte 0,0005-Quantil der Poissonverteilung mit $\lambda = 9$ ersetzt wird durch $\lambda + z\sqrt{\lambda}$. Dieser Fehler beträgt 1,7107 (vgl. Knüsel (1972), S. 41). Bei allen Berechnungen mit $0{,}0005 \leq \gamma \leq 0{,}9995$ und $\tau \geq 3$ blieb der absolute Fehler $|q^0 - \Delta_1|$ unter dem Wert 1,7107. In den Tabellen 2 - 13 findet man 1,2843 als größten absoluten Fehler von Δ_1 (Tab. 12, $\gamma = 0{,}0005$).

Der asymptotische Fehler der Näherung Δ_2 beträgt $\frac{1}{\tau}C_2(z) = \frac{1}{\tau}(R_1(z) - zP_2(u))$ mit $R_1(z)$ und u wie in Satz 3. Extremum von $R_1(z)$ ist - 0,6737 für $0 \leq z \leq 3{,}2905$; es wird z.B. angenommen für $\frac{m}{N} = 0$, $\frac{M}{N} = 0{,}5$ und $z = 3{,}2905$. Für $0 \leq z \leq 3{,}2905$ gilt $0 \leq - zP_2(u) \leq \frac{z}{8} \leq 0{,}4113$. Aus dem Verlauf der Funktionen $R_1(z)$ und $- zP_2(u)$ folgt $|R_1(z) - zP_2(u)| \leq 0{,}6737$ für $|z| \leq 3{,}2905$ und daraus $|\frac{1}{\tau}C_2(z)| \leq 0{,}2246$ für $|z| \leq 3{,}2905$ und $\tau \geq 3$.

Numerische Untersuchungen zeigen, daß der absolute Fehler größer als 0,2246 ist. Beim Grenzübergang $\frac{m}{N} \longrightarrow 0$, τ und $p = \frac{M}{N}$ $(0 < p < 1)$ konstant, konvergiert q^0 gegen das analog zu q^0 definierte γ-Quantil q_B^0 der Binomialverteilung mit den Parametern $n = \frac{\tau^2}{p(1-p)}$ und p und Δ_2 gegen $\Delta_2^B = np + z\sqrt{np(1-p)} + \frac{1-2p}{6}(z^2-1)$.

Folglich kann $|q^0 - \Delta_2|$ das Maximum von $|q_B^0 - \Delta_2^B$ erreichen. Dieses beträgt 0,285 für $\sqrt{np(1-p)} \geq 3$ und $0{,}0005 \leq \gamma \leq 0{,}9995$ (vgl. Knüsel (1972), S. 35). Der Wert 0,285 wurde bei allen Berechnungen des absoluten Fehlers von Δ_2 mit $\tau \geq 3$ und $0{,}0005 \leq \gamma \leq 0{,}9995$ nicht überschritten.

Tab. 2: Asymptotische Entwicklung der Quantile der modifizierten hypergeometrischen Verteilung

m = 72 M = 72 N = 144

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
γ	q^0	Δ_1	(2)-(3)	$C_1(z)$	(4)-(5)	$\tau^{-1}C_2(z)$	(6)-(7)	$\tau^{-2}C_3(z)$	(8)-(9)
.00050	26.05793	26.12842	-7049	0	-7049	-7192	143	362	-219
.00100	26.68258	26.72930	-4672	0	-4672	-4515	-157	-151	-6
.00500	28.22075	28.27251	-5176	0	-5176	-5025	-151	-68	-84
.01000	28.94191	29.02096	-7905	0	-7905	-7894	-11	199	-209
.02500	30.05078	30.12011	-6933	0	-6933	-6728	-204	-82	-122
.05000	31.00202	31.06544	-6342	0	-6342	-6249	-93	-16	-77
.10000	32.10643	32.15535	-4892	0	-4892	-4681	-210	-180	-30
.20000	33.47056	33.47514	-457	0	-457	-383	-75	-63	-11
.30000	34.41887	34.42680	-793	0	-793	-659	-134	-127	-7
.40000	35.22967	35.23996	-1029	0	-1029	-854	-175	-177	2
.50000	36.00000	36.00000	0	0	0	0	0	0	0
.60000	36.77033	36.76004	1029	0	1029	854	175	177	-2
.70000	37.58113	37.57320	793	0	793	659	134	127	7
.80000	38.52944	38.52486	457	0	457	383	75	63	11
.90000	39.89357	39.84465	4892	0	4892	4681	210	180	30
.95000	40.99798	40.93456	6342	0	6342	6249	93	16	77
.97500	41.94922	41.87989	6933	0	6933	6728	204	82	122
.99000	43.05809	42.97904	7905	0	7905	7894	11	-199	209
.99500	43.77925	43.72749	5176	0	5176	5025	151	68	84
.99900	45.31742	45.27070	4672	0	4672	4515	157	151	6
.99950	45.94207	45.87158	7049	0	7049	7192	-143	-362	219

Tab. 3: Asymptotische Entwicklung der Quantile der modifizierten hypergeometrischen Verteilung

m = 288 M = 288 N = 576

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
γ	q^0	Δ_1	(2)-(3)	$C_1(z)$	(4)-(5)	$\tau^{-1}C_2(z)$	(6)-(7)	$\tau^{-2}C_3(z)$	(8)-(9)
.00050	124.23581	124.25684	-2103	0	-2103	-2239	136	128	8
.00100	125.47640	125.45861	1780	0	1780	1272	508	449	60
.00500	128.54689	128.54502	187	0	187	337	-150	-168	17
.01000	130.00252	130.04191	-3939	0	-3939	-3922	-17	9	-26
.02500	132.21278	132.24022	-2744	0	-2744	-2657	-86	-75	-11
.05000	134.10085	134.13088	-3003	0	-3003	-2948	-55	-46	-9
.10000	136.29425	136.31069	-1644	0	-1644	-1568	-76	-73	-3
.20000	138.93287	138.95027	-1740	0	-1740	-1757	18	18	0
.30000	140.84364	140.85360	-995	0	-995	-1032	36	36	0
.40000	142.47920	142.47992	-72	0	-72	-62	-10	-9	0
.50000	144.00000	144.00000	0	0	0	0	0	0	0
.60000	145.52080	145.52008	72	0	72	62	10	9	0
.70000	147.15636	147.14640	995	0	995	1032	-36	-36	0
.80000	149.06713	149.04973	1740	0	1740	1757	-18	-18	0
.90000	151.70575	151.68931	1644	0	1644	1568	76	73	3
.95000	153.89915	153.86912	3003	0	3003	2948	55	46	9
.97500	155.78722	155.75978	2744	0	2744	2657	86	75	11
.99000	157.99748	157.95809	3939	0	3939	3922	17	-9	26
.99500	159.45311	159.45498	-187	0	-187	-337	150	168	-17
.99900	162.52366	162.54139	-1780	0	-1780	-1272	-508	-449	-60
.99950	163.76419	163.74316	2103	0	2103	2239	-136	-128	-8

Tab. 4: Asymptotische Entwicklung der Quantile der modifizierten hypergeometrischen Verteilung

m = 48 M = 96 N = 192

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
γ	q^0	Δ_1	(2)-(3)	$C_1(z)$	(4)-(5)	$\tau^{-1}C_2(z)$	(6)-(7)	$\tau^{-2}C_3(z)$	(8)-(9)
.00050	14.10975	14.12842	-1917	0	-1917	-2981	1064	720	344
.00100	14.70943	14.72930	-1988	0	-1988	-1075	-913	-1209	296
.00500	16.24488	16.27251	-2763	0	-2763	-3135	372	308	63
.01000	16.95519	17.02096	-6577	0	-6577	-6558	-19	146	-164
.02500	18.05840	18.12011	-6170	0	-6170	-6003	-167	-56	-112
.05000	19.00569	19.06544	-5975	0	-5975	-5884	-91	-15	-76
.10000	20.10755	20.15535	-4779	0	-4779	-4574	-205	-175	-30
.20000	21.47026	21.47514	-498	0	-498	-415	-83	-67	-16
.30000	22.41833	22.42680	-847	0	-847	-708	-139	-130	-9
.40000	23.22937	23.23996	-1059	0	-1059	-885	-174	-178	4
.50000	24.00000	24.00000	0	0	0	0	0	0	0
.60000	24.77063	24.76004	1059	0	1059	885	174	178	-4
.70000	25.58167	25.57320	847	0	847	708	139	130	9
.80000	26.52984	26.52486	498	0	498	415	83	67	16
.90000	27.89245	27.84465	4779	0	4779	4574	205	175	30
.95000	28.99431	28.93456	5975	0	5975	5884	91	15	76
.97500	29.94160	29.87989	6170	0	6170	6003	167	56	112
.99000	31.04481	30.97904	6577	0	6577	6558	19	-146	164
.99500	31.75512	31.72749	2763	0	2763	3135	-372	-308	-63
.99900	33.29057	33.27070	1988	0	1988	1075	913	1209	-296
.99950	33.89075	33.87158	1917	0	1917	2981	-1064	-720	-344

Tab. 5: Asymptotische Entwicklung der Quantile der modifizierten hypergeometrischen Verteilung

m = 192 M = 384 N = 768

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
γ	q^0	Δ_1	(2)-(3)	$C_1(z)$	(4)-(5)	$\tau^{-1}C_2(z)$	(6)-(7)	$\tau^{-2}C_3(z)$	(8)-(9)
.00050	76.26046	76.25684	362	0	362	-134	496	411	84
.00100	77.49866	77.45861	4005	0	4005	2992	1014	874	140
.00500	80.55473	80.54502	970	0	970	1282	-312	-349	37
.01000	82.00928	82.04191	-3263	0	-3263	-3253	-10	10	-20
.02500	84.21668	84.24022	-2353	0	-2353	-2295	-59	-50	-9
.05000	86.10273	86.13088	-2815	0	-2815	-2766	-49	-41	-9
.10000	88.29482	88.31069	-1587	0	-1587	-1514	-73	-70	-3
.20000	90.93272	90.95027	-1755	0	-1755	-1773	18	18	0
.30000	92.84340	92.85360	-1019	0	-1019	-1057	37	36	1
.40000	94.47904	94.47992	-88	0	-88	-78	-10	-10	-1
.50000	96.00000	96.00000	0	0	0	0	0	0	0
.60000	97.52096	97.52008	88	0	88	78	10	10	1
.70000	99.15660	99.14640	1019	0	1019	1057	-37	-36	-1
.80000	101.06728	101.04973	1755	0	1755	1773	-18	-18	0
.90000	103.70518	103.68931	1587	0	1587	1514	73	70	3
.95000	105.89727	105.86912	2815	0	2815	2766	49	41	9
.97500	107.78332	107.75978	2353	0	2353	2295	59	50	9
.99000	109.99072	109.95809	3263	0	3263	3253	10	-10	20
.99500	111.44527	111.45498	-970	0	-970	-1282	312	349	-37
.99900	114.50134	114.54139	-4005	0	-4005	-2992	-1014	-874	-140
.99950	115.73954	115.74316	-362	0	-362	134	-496	-411	-84

Tab. 6: Asymptotische Entwicklung der Quantile der modifizierten hypergeometrischen Verteilung

m = 40 M = 200 N = 400

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
γ	q^0	Δ_1	(2)-(3)	$C_1(z)$	(4)-(5)	$t^{-1}C_2(z)$	(6)-(7)	$t^{-2}C_3(z)$	(8)-(9)
.00050	10.19481	10.12842	6639	0	6639	3587	3052	1667	1384
.00100	10.75275	10.72930	2345	0	2345	4292	-1947	-2617	670
.00500	12.28344	12.27251	1093	0	1093	-186	1279	956	323
.01000	12.97615	13.02096	-4480	0	-4480	-4473	-7	90	-98
.02500	14.07037	14.12011	-4974	0	-4974	-4872	-102	-7	-95
.05000	15.01244	15.06544	-5300	0	-5300	-5314	-86	-12	-74
.10000	16.10931	16.15535	-4603	0	-4603	-4407	-196	-167	-29
.20000	17.46952	17.47514	-561	0	-561	-465	-97	-74	-23
.30000	18.41747	18.42680	-932	0	-932	-786	-147	-136	-11
.40000	19.22891	19.23996	-1105	0	-1105	-933	-172	-179	6
.50000	20.00000	20.00000	0	0	0	0	0	0	0
.60000	20.77109	20.76004	1105	0	1105	933	172	179	-6
.70000	21.58253	21.57320	932	0	932	786	147	136	11
.80000	22.53048	22.52486	561	0	561	465	97	74	23
.90000	23.89069	23.84465	4603	0	4603	4407	196	167	29
.95000	24.98856	24.93456	5400	0	5400	5314	86	12	74
.97500	25.92963	25.87989	4974	0	4974	4872	102	7	95
.99000	27.02385	26.97904	4480	0	4480	4473	7	-90	98
.99500	27.71656	27.72749	-1093	0	-1093	186	-1279	-956	-323
.99900	29.24725	29.27070	-2345	0	-2345	-4292	1947	2617	-670
.99950	29.80529	29.87158	-6639	0	-6639	-3587	-3052	-1667	-1384

Tab. 7: Asymptotische Entwicklung der Quantile der modifizierten hypergeometrischen Verteilung

m = 160 M = 800 N = 1600

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
γ	q^0	Δ_1	(2)-(3)	$C_1(z)$	(4)-(5)	$\tau^{-1}C_2(z)$	(6)-(7)	$\tau^{-2}C_3(z)$	(8)-(9)
.00050	60.29949	60.25684	4265	0	4265	3150	1114	901	213
.00100	61.52011	61.45861	6151	0	6151	5675	476	777	-301
.00500	64.56700	64.54502	2198	0	2198	2756	-558	-624	66
.01000	66.01985	66.04191	-2206	0	-2206	-2211	5	15	-12
.02500	68.22278	68.24022	-1743	0	-1743	-1729	-14	-9	-5
.05000	70.10566	70.13088	-2522	0	-2522	-2481	-41	-32	-8
.10000	72.29571	72.31069	-1498	0	-1498	-1430	-68	-64	-3
.20000	74.93248	74.95027	-1779	0	-1779	-1798	19	18	1
.30000	76.84303	76.85360	-1057	0	-1057	-1095	38	37	1
.40000	78.47879	78.47992	-113	0	-113	-102	-11	-10	-1
.50000	80.00000	80.00000	0	0	0	0	0	0	0
.60000	81.52121	81.52008	113	0	113	102	11	10	1
.70000	83.15697	83.14640	1057	0	1057	1095	-38	-37	-1
.80000	85.06752	85.04973	1779	0	1779	1798	-19	-18	-1
.90000	87.70429	87.68931	1498	0	1498	1430	68	64	3
.95000	89.89434	89.86912	2522	0	2522	2481	41	32	8
.97500	91.77722	91.75978	1743	0	1743	1729	14	9	5
.99000	93.98015	93.95809	2206	0	2206	2211	-5	-16	12
.99500	95.43300	95.45498	-2198	0	-2198	-2756	558	624	-66
.99900	98.47989	98.54139	-6151	0	-6151	-5675	-476	-777	301
.99950	99.70051	99.74316	-4265	0	-4265	-3150	-1114	-901	-213

Tab. 8: Asymptotische Entwicklung der Quantile der modifizierten hypergeometrischen Verteilung

m = 60 M = 75 N = 300

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
γ	q^0	Δ_1	(2)-(3)	$C_1(z)$	(4)-(5)	$\tau^{-1}C_2(z)$	(6)-(7)	$\tau^{-2}C_3(z)$	(8)-(9)
.00050	5.67669	5.12842	54827	49138	5689	8327	-2638	-2833	195
.00100	6.18743	5.72930	45813	42748	3065	-32	3097	1786	1311
.00500	7.58422	7.27251	31171	28174	2996	4268	-1271	-1355	84
.01000	8.21800	8.02096	19704	22059	-2355	-2792	437	333	104
.02500	9.22787	9.12011	10776	14207	-3432	-3317	-115	-55	-60
.05000	10.09905	10.06544	3361	8528	-5167	-4837	-330	-235	-94
.10000	11.14342	11.15535	-1193	3212	-4404	-4080	-324	-271	-53
.20000	12.45359	12.47514	-2154	-1458	-696	-530	-165	-131	-35
.30000	13.37900	13.42680	-4780	-3625	-1155	-947	-208	-189	-19
.40000	14.18241	14.23996	-5755	-4679	-1076	-967	-109	-113	4
.50000	14.95116	15.00000	-4884	-5000	116	0	116	117	-1
.60000	15.72301	15.76004	-3704	-4679	976	777	198	207	-8
.70000	16.54135	16.57320	-3185	-3625	440	407	33	29	3
.80000	17.51156	17.52486	-1331	-1458	128	142	-14	-23	10
.90000	18.92243	18.84465	7777	3212	4565	4507	59	42	16
.95000	20.07266	19.93456	13810	8528	5282	5449	-167	-247	80
.97500	21.07590	20.87989	19601	14207	5393	5547	-153	-266	113
.99000	22.23582	21.97904	25678	22059	3618	3509	109	118	-9
.99500	23.05231	22.72749	32482	28174	4308	4258	49	-18	67
.99900	24.64483	24.27070	37413	42748	-5335	-3394	-1941	-1645	-295
.99950	25.32765	24.87158	45607	49138	-3531	-7624	4094	5877	-1784

Tab. 9: Asymptotische Entwicklung der Quantile der modifizierten hypergeometrischen Verteilung

m = 240 M = 300 N = 1200

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
γ	q^0	Δ_1	(2)-(3)	$C_1(z)$	(4)-(5)	$\tau^{-1}C_2(z)$	(6)-(7)	$\tau^{-2}C_3(z)$	(8)-(9)
.00050	40.76424	40.25684	50740	49138	1602	1938	-336	-378	43
.00100	41.88277	41.45861	42416	42748	-331	-315	-16	-41	24
.00500	44.81134	44.54502	26632	28174	-1543	-1487	-56	-49	-7
.01000	46.25175	46.04191	20984	22059	-1076	-1191	116	99	16
.02500	48.37924	48.24022	13903	14207	-305	-394	89	77	12
.05000	50.19444	50.13088	6356	8528	-2172	-2089	-82	-72	-10
.10000	52.33046	52.31069	1977	3212	-1235	-1160	-75	-68	-6
.20000	54.91866	54.95027	-3161	-1458	-1703	-1724	21	19	1
.30000	56.80791	56.85360	-4569	-3625	-944	-994	51	49	2
.40000	58.43111	58.47992	-4881	-4679	-202	-166	-36	-35	-1
.50000	59.95029	60.00000	-4971	-5000	29	0	29	29	0
.60000	61.47394	61.52008	-4614	-4679	65	89	-24	-26	1
.70000	63.12082	63.14640	-2559	-3625	1066	1087	-21	-20	-1
.80000	65.05243	65.04973	270	-1458	1728	1744	-16	-15	-1
.90000	67.73778	67.68931	4847	3212	1635	1587	48	48	0
.95000	69.98122	69.86912	11210	8528	2682	2701	-19	-28	9
.97500	71.92800	71.75978	16821	14207	2614	2624	-10	-22	12
.99000	74.19799	73.95809	23990	22059	1931	1908	22	21	1
.99500	75.74203	75.45498	28705	28174	531	643	-113	-111	-2
.99900	78.97572	78.54139	43432	42748	685	624	61	88	-27
.99950	80.22493	79.74316	48177	49138	-961	-1708	747	923	-176

Tab. 10: Asymptotische Entwicklung der Quantile der modifizierten hypergeometrischen Verteilung

m = 52 M = 169 N = 676

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
γ	q^0	Δ_1	(2)-(3)	$C_1(z)$	(4)-(5)	$\tau^{-1}C_2(z)$	(6)-(7)	$\tau^{-2}C_3(z)$	(8)-(9)
.00050	3.87981	3.12842	75139	69297	5843	6386	-544	-1267	723
.00100	4.50774	3.72930	77844	60285	17559	7896	9663	5792	3871
.00500	5.68320	5.27251	41068	39733	1335	2455	-1120	-1172	52
.01000	6.35728	6.02096	33632	31110	2523	724	1799	1188	611
.02500	7.31067	7.12011	19056	20036	-980	-1306	326	252	73
.05000	8.14242	8.06544	7698	12026	-4328	-3979	-350	-247	-102
.10000	9.16004	9.15535	469	4530	-4061	-3715	-345	-281	-64
.20000	10.44736	10.47514	-2777	-2057	-721	-532	-188	-144	-45
.30000	11.36316	11.42680	-6364	-5112	-1251	-1027	-224	-202	-22
.40000	12.16328	12.23996	-7668	-6599	-1069	-993	-76	-82	6
.50000	12.93105	13.00000	-6895	-7051	156	0	156	158	-1
.60000	13.70323	13.76004	-5681	-6599	918	726	192	203	-11
.70000	14.52452	14.57320	-4868	-5112	244	264	-20	-26	6
.80000	15.50361	15.52486	-2125	-2057	-69	-16	-52	-64	11
.90000	16.93319	16.84465	8854	4530	4324	4316	8	-6	13
.95000	18.10102	17.93456	16646	12026	4620	4842	-222	-305	83
.97500	19.12289	18.87989	24300	20036	4264	4450	-186	-283	97
.99000	20.29944	19.97904	32040	31110	930	287	643	873	-230
.99500	21.14398	20.72749	41649	39733	1916	1556	360	491	-131
.99900	22.83260	22.27070	56191	60285	-4095	-3037	-1057	-711	-346
.99950	23.43956	22.87158	56798	69297	-12499	-15036	2537	2426	111

Tab. 11: Asymptotische Entwicklung der Quantile der modifizierten hypergeometrischen Verteilung

m = 208 M = 676 N = 2704

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
γ	q^0	Δ_1	(2)-(3)	$C_1(z)$	(4)-(5)	$\tau^{-1}C_2(z)$	(6)-(7)	$\tau^{-2}C_3(z)$	(8)-(9)
.00050	32.97573	32.25684	71889	69297	2592	2387	205	75	130
.00100	34.07784	33.45861	61923	60285	1638	1204	434	308	126
.00500	36.93146	36.54502	38644	39733	-1089	-1041	-48	-45	-3
.01000	38.36355	38.04191	32164	31110	1054	640	414	342	72
.02500	40.45181	40.24022	21159	20036	1123	840	283	244	40
.05000	42.23450	42.13088	10362	12026	-1664	-1597	-67	-57	-10
.10000	44.34601	44.31069	3532	4530	-997	-934	-63	-56	-7
.20000	46.91313	46.95027	-3714	-2057	-1657	-1661	23	21	2
.30000	48.79343	48.85360	-6017	-5112	-904	-960	55	53	2
.40000	50.41152	50.47992	-6840	-6599	-241	-199	-43	-41	-1
.50000	51.92988	52.00000	-7012	-7051	39	0	39	39	0
.60000	53.45501	53.52008	-6508	-6599	91	125	-34	-36	2
.70000	55.10605	55.14640	-4035	-5112	1077	1091	-14	-13	-1
.80000	57.04612	57.04973	-361	-2057	1696	1709	-14	-13	-1
.90000	59.75032	59.68931	6101	4530	1571	1535	36	37	-1
.95000	62.01357	61.86912	14445	12026	2419	2460	-42	-51	9
.97500	63.98276	63.75978	22298	20036	2262	2304	-43	-55	12
.99000	66.27446	65.95809	31637	31110	528	371	157	184	-27
.99500	67.85761	67.45498	40263	39733	530	644	-114	-115	1
.99900	71.13216	70.54139	59077	60285	-1209	-1643	434	552	-118
.99950	72.38106	71.74316	63790	69297	-5507	-7534	2027	2483	-456

Tab. 12: Asymptotische Entwicklung der Quantile der modifizierten hypergeometrischen Verteilung

m = 110 M = 121 N = 1210

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
γ	q^0	Δ_1	(2)-(3)	$C_1(z)$	(4)-(5)	$t^{-1}C_2(z)$	(6)-(7)	$t^{-2}C_3(z)$	(8)-(9)
.00050	2.41275	1.12842	128433	107210	21224	7698	13526	5203	8323
.00100	2.72624	1.72930	99684	93268	6416	8937	-2521	-2301	-220
.00500	3.87223	3.27251	59972	61472	-1500	-914	-586	-479	-107
.01000	4.55505	4.02096	53409	48130	5280	6771	-1491	-1391	-100
.02500	5.46733	5.12011	34722	30998	3724	2012	1712	1178	534
.05000	6.22191	6.06544	15647	18606	-2959	-2645	-314	-204	-111
.10000	7.19103	7.15535	3568	7008	-3440	-3053	-387	-296	-91
.20000	8.43744	8.47514	-3770	-3182	-588	-380	-208	-149	-59
.30000	9.33523	9.42680	-9157	-7909	-1248	-1019	-229	-201	-28
.40000	10.12838	10.23996	-11158	-10209	-949	-951	2	-6	8
.50000	10.89323	11.00000	-10677	-10909	232	0	232	234	-2
.60000	11.66495	11.76004	-9509	-10209	700	537	163	177	-15
.70000	12.49250	12.57320	-8070	-7909	-161	-58	-103	-130	28
.80000	13.49002	13.52486	-3484	-3182	-302	-273	-29	-59	29
.90000	14.95368	14.84465	10903	7008	3895	3983	-88	-101	13
.95000	16.15750	15.93456	22294	18606	3688	3980	-291	-383	91
.97500	17.21725	16.87989	33736	30998	2739	2853	-114	-161	47
.99000	18.42799	17.97904	44894	48130	-3236	-5381	2145	2967	-821
.99500	19.32481	18.72749	59732	61472	-1739	-3568	1829	2643	-815
.99900	21.17323	20.27070	90253	93268	-3014	-5183	2168	3388	-1220
.99950	21.88368	20.87158	101210	107210	-6000	-5667	-333	180	-513

Tab. 13: Asymptotische Entwicklung der Quantile der modifizierten hypergeometrischen Verteilung

m = 440 M = 484 N = 4840

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
γ	q^0	Δ_1	(2)-(3)	$C_1(z)$	(4)-(5)	$\tau^{-1}C_2(z)$	(6)-(7)	$\tau^{-2}C_3(z)$	(8)-(9)
.00050	25.41700	24.25684	116016	107210	8806	5713	3092	2160	932
.00100	26.47433	25.45861	101572	93268	8305	5469	2836	2043	793
.00500	29.16040	28.54502	61538	61472	66	-182	248	193	55
.01000	30.54959	30.04191	50768	48130	2638	2989	-351	-341	-10
.02500	32.56157	32.24022	32136	30998	1138	1289	-152	-152	0
.05000	34.30861	34.13088	17774	18606	-832	-812	-20	-14	-6
.10000	36.37516	36.31069	6447	7008	-561	-521	-40	-32	-8
.20000	38.90349	38.95027	-4678	-3182	-1496	-1522	26	22	4
.30000	40.76695	40.85360	-8664	-7909	-755	-816	61	57	3
.40000	42.37522	42.47992	-10470	-10209	-261	-214	-46	-45	-2
.50000	43.89149	44.00000	-10851	-10909	58	0	58	59	0
.60000	45.41963	45.52008	-10105	-10209	104	147	-43	-45	2
.70000	47.07751	47.14640	-6889	-7909	1020	1018	2	3	-1
.80000	49.03348	49.04973	-1625	-3182	1557	1566	-9	-9	-1
.90000	51.77401	51.68931	8470	7008	1462	1451	11	14	-3
.95000	54.07590	53.86912	20678	18606	2072	2148	-75	-87	12
.97500	56.08841	55.75978	32863	30998	1865	1936	-70	-84	14
.99000	58.42182	57.95809	46374	48130	-1756	-2325	569	580	-112
.99500	60.07635	59.45498	62137	61472	666	625	40	53	-13
.99900	63.42091	62.54139	87952	93268	-5316	-7314	1998	2492	-494
.99950	64.77436	63.74316	103120	107210	-4090	-3682	-408	-378	-30

3. Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Tests von Fisher-Yates

3.1 Herleitung der Entwicklung

X_1 und X_2 seien unabhängige binomialverteilte Zufallsgrößen mit den Parametern n_1, p_1 und n_2, p_2. Hypothese und Alternative über den unbekannten Parameter $(p_1, p_2) \in \Theta = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y_1, y_2 < 1\}$ lauten

$$H_0: p_1 \leq p_2$$

$$H_1: p_1 > p_2.$$

Der Test von Fisher-Yates löst dieses Testproblem. Wir bezeichnen mit Ω den Stichprobenraum, mit α das vorgegebene Signifikanzniveau, mit $q(\gamma,m,M,N)$ das γ-Quantil der hypergeometrischen Verteilungsfunktion F mit den Parametern m, M, N und mit $q^0(\gamma,m,M,N)$ das γ-Quantil der Verteilungsfunktion

$$F^0(x) = F(x-\tfrac{1}{2}) + P_1(x-\tfrac{1}{2})(F(x+\tfrac{1}{2}) - F(x-\tfrac{1}{2})) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Es sei

$$\delta(\gamma,m,M,N) = q(\gamma,m,M,N) + \tfrac{1}{2} - q^0(\gamma,m,M,N).$$

Die Testfunktion des Tests von Fisher-Yates ist dann

$$\psi_1(k_1,k_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k_1 > q \\ \delta & \text{falls } k_1 = q \\ 0 & \text{falls } k_1 < q \end{cases} \qquad (k_1,k_2) \in \Omega$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{falls } k_1 \geq q^0+\frac{1}{2} \\ k_1+\frac{1}{2}-q^0 & \text{falls } |k_1-q^0| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{falls } k_1 \leq q^0-\frac{1}{2} \end{cases} \qquad (k_1,k_2) \in \Omega, \tag{3.1}$$

wobei wir $q = q(1-\alpha,k_1+k_2,n_1,n_1+n_2)$, $q^0 = q^0(1-\alpha,k_1+k_2,n_1,n_1+n_2)$ und $\delta = \delta(1-\alpha,k_1+k_2,n_1,n_1+n_2)$ gesetzt haben.

Bei asymptotischen Entwicklungen zur Binomialverteilung ist es vorteilhaft, Potenzen der Standardabweichung als asymptotische Skala zu wählen (vgl. Hemelrijk (1962)). Da die Gütefunktion des Tests von Fisher-Yates $g_1(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha)$ von den Parametern zweier Binomialverteilungen abhängt, sprechen Symmetriegründe dafür, die Entwicklung der Gütefunktion nach Potenzen von

$$\sigma = \sqrt{(n_1+n_2)\tfrac{1}{2}(p_1+p_2)(1-\tfrac{1}{2}(p_1+p_2))} \tag{3.2}$$

zu ordnen.

Beim Grenzübergang $\sigma \to \infty$ sollen

$$\lim_{\sigma\to\infty} g_1(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha) = 1 \qquad p_1 > p_2$$

und

$$\lim_{\sigma\to\infty} g_1(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha) = \alpha \qquad p_1 > p_2$$

ausgeschlossen werden. Der Grenzübergang ist dazu so einzuschrän-

ken, daß für geeignete $J_1, J_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 < J_1 \leq \sigma(p_1 - p_2) \leq J_2 \qquad p_1 > p_2.$$

Weitere Voraussetzungen sind notwendig, um die gleichmäßige Abschätzung des Restglieds zu gewährleisten.

Die folgenden Abkürzungen gelten für den ganzen Abschnitt 3:

$$n = n_1 + n_2$$

$$p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$$

(3.3)

$$\lambda = \frac{n_1}{n}$$

$$d = \sigma(p_1 - p_2)\frac{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}{p(1-p)} .$$

Mit $z = z(1-\alpha)$ wird stets das $(1-\alpha)$-Quantil von Φ bezeichnet.

Satz 4:

Es sei $g_1(n_1, n_2, p_1, p_2, \alpha)$ die Gütefunktion des Tests von Fisher-Yates. Existieren $\varepsilon_1, \varepsilon_2, J_1, J_2 \in \mathbb{R}$, mit

$$0 < \varepsilon_1 \leq \alpha, p, \lambda \leq \varepsilon_2 < 1$$

$$0 < J_1 \leq \sigma(p_1 - p_2) \leq J_2 \qquad p_1 > p_2$$

dann gilt für $\sigma \to \infty$

(3.4) $g_1(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha) =$

$$= 1 - \Phi(z-d) + \frac{1}{\sigma} A_1(d) + \frac{1}{\sigma^2} A_2(d) + o(\sigma^{-2})$$

wobei

$$A_1(d) = \frac{\phi(z-d)}{12\sqrt{(1-\lambda)}} (a_1 d^2 + a_2 d)$$

$$A_2(d) = \frac{\phi(z-d)}{576(1-\lambda)} (a_3 d^5 + a_4 d^4 + a_5 d^3 + a_6 d^2 + a_7 d)$$

$$a_1 = -ab$$

$$a_2 = 2abz$$

$$a_3 = -2a^2b^2$$

$$a_4 = 10a^2b^2z$$

$$a_5 = -16a^2b^2z^2 + 7a^2b^2 + 9a^2 - 3b^2 + 9$$

$$a_6 = 8a^2b^2z^3 - 21a^2b^2z + 9a^2z + 15b^2z - 3z$$

$$a_7 = 13a^2b^2z^2 - 11a^2b^2 - 9a^2z^2 - 9b^2z^2$$

$$- 9a^2 + 9b^2 - 3z^2 + 27 + 576\, I_1$$

$$a = 1 - 2p$$

$$b = 1 - 2\lambda$$

$$I_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sigma} \phi(s(k)) P_2(\nu_1 s(k) + \nu_2)$$

$$s(k) = \frac{k - n_1 p_1 - n_2 p_2}{\sigma}$$

$$\nu_1 = \sigma\lambda + \frac{1}{2}az\sqrt{\lambda(1-\lambda)}$$

$$\nu_2 = n_1p_1+n_2p_2+\sigma z\sqrt{\lambda(1-\lambda)}-\frac{1}{4}abdz+\frac{1}{6}ab(z^2-1)+\frac{1}{2}\ .$$

Ist zusätzlich λ konstant für $\sigma\to\infty$ und $\lambda = \frac{\kappa_1}{\kappa}$ mit $\kappa_1,\kappa \in \mathbb{N}$, κ_1 und κ teilerfremd, so gilt die Entwicklung (3.4) mit

$$(3.5)\qquad I_1 = \frac{1}{\kappa^2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\left(P_2(\rho_1x+\rho_2)+\frac{1}{12}\right)dx - \frac{1}{12}$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\kappa az\sqrt{\lambda(1-\lambda)}$$

$$\rho_2 = \kappa\left(\sigma z\sqrt{\lambda(1-\lambda)} -\frac{1}{4}abdz+\frac{1}{6}ab(z^2-1)+\frac{1}{2}\right).$$

Beweis:

Für $(k_1,k_2) \in \Omega$ sei $A(k_1,k_2) =$

$\{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid k_1-\frac{1}{2} \le y_1 < k_1+\frac{1}{2},\ k_1+k_2-\frac{1}{2} \le y_1+y_2 < k_1+k_2+\frac{1}{2}\}$. Die Zufallsgröße (X_1^0,X_2^0) besitze die folgende Dichte

$$f^0(y_1,y_2) = \begin{cases} P\{X_1=k_1,X_2=k_2\} & \text{falls } (k_1,k_2) \in \Omega \text{ existiert} \\ & \text{mit } (y_1,y_2) \in A(k_1,k_2) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Dichte f^0 kann man sich anschaulich aus der Verteilung von (X_1,X_2) so entstanden denken: Die Wahrscheinlichkeiten von $(k_1,k_2) \in \Omega$ werden gleichmäßig verteilt auf Parallelogramme $A(k_1,k_2)$ mit den Mittelpunkten (k_1,k_2), deren Seiten parallel

zur Ordinatenachse bzw. zur zweiten Winkelhalbierenden liegen.

Es sei wieder $q = q(1-\alpha,k,n_1,n)$, $q^0 = q^0(1-\alpha,k,n_1,n)$ und $\delta = \delta(1-\alpha,k,n_1,n)$, dann gilt

$$g_1(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(P\{X_1>q,\ X_1+X_2=k\} + \delta P\{X_1=q,\ X_1+X_2=k\}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P\{X_1^0 > q+\tfrac{1}{2}-\delta,\ k-\tfrac{1}{2} \le X_1^0+X_2^0 < k+\tfrac{1}{2}\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P\{X_1^0 > q^0,\ k-\tfrac{1}{2} \le X_1^0+X_2^0 < k+\tfrac{1}{2}\}.$$

Wir bilden die Zufallsgrößen

$$R = \frac{X_1-\mu_1}{\sigma}$$

$$S = \frac{X_1+X_2-\mu_1-\mu_2}{\sigma}$$

$$R^0 = \frac{X_1^0-\mu_1}{\sigma}$$

$$S^0 = \frac{X_1^0+X_2^0-\mu_1-\mu_2}{\sigma}$$

mit $\mu_1 = n_1p_1$ und $\mu_2 = n_2p_2$. Die Dichte von (R^0,S^0) ist konstant auf Quadraten der Länge $\frac{1}{\sigma}$ mit den Mittelpunkten $\left(\frac{k_1-\mu_1}{\sigma},\ \frac{k-\mu_1-\mu_2}{\sigma}\right)$ $k_1,k \in \mathbb{Z}$.

Es sei Ω_1 der Stichprobenraum von (R,S), $\Omega_1^S = \{s \in \mathbb{R} \mid (r,s) \in \Omega_1\}$ und $q^0(s) = q^0(1-\alpha, s\sigma+\mu_1+\mu_2, n_1, n)$ für $s \in \Omega_1^S$; man erhält dann

$$g_1(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha) =$$

$$= \sum_{s \in \Omega_1^S} P\{R^0 > \frac{q^0(s)-\mu_1}{\sigma},\ s-\frac{1}{2\sigma} \le S^0 < s+\frac{1}{2\sigma}\}.$$

Im Beweis gelten die Bezeichnungen

$$\Omega_2 = \{(r,s) \in \Omega_1 \mid -\ln\sigma \le r,s \le \ln\sigma\}$$

$$\Omega_2^R = \{r \in \mathbb{R} \mid (r,s) \in \Omega_2\}$$

$$\Omega_2^S = \{s \in \mathbb{R} \mid (r,s) \in \Omega_2\}$$

$$r_o = \min \Omega_2^R$$

$$r_1 = \max \Omega_2^R$$

$$s_o = \min \Omega_2^S$$

$$s_1 = \max \Omega_2^S.$$

Für die folgenden sechs Wahrscheinlichkeiten werden in den sechs Teilen des Beweises asymptotische Entwicklungen hergeleitet:

$$P\{r-\frac{1}{2\sigma} \le R^0 \le r+\frac{1}{2\sigma},\ s-\frac{1}{2\sigma} \le S^0 < s+\frac{1}{2\sigma}\} \qquad (r,s) \in \Omega_2$$

$$P\{r_o - \tfrac{1}{2\sigma} \le R^0 \le v + \tfrac{1}{2\sigma},\ s - \tfrac{1}{2\sigma} \le S^0 < s + \tfrac{1}{2\sigma}\} \qquad (v,s) \in \Omega_2$$

$$P\{r_o - \tfrac{1}{2\sigma} \le R^0 \le w,\ s - \tfrac{1}{2\sigma} \le S^0 < s + \tfrac{1}{2\sigma}\}$$

$$r_o - \tfrac{1}{2\sigma} \le w \le r_1 + \tfrac{1}{2\sigma},\ s \in \Omega_2^S$$

$$P\{r_o - \tfrac{1}{2\sigma} \le R^0 \le \frac{q^0(s)-\mu_1}{\sigma},\ s - \tfrac{1}{2\sigma} \le S^0 < s + \tfrac{1}{2\sigma}\} \qquad s \in \Omega_2^S$$

$$\sum_{s \in \Omega_2^S} P\{r_o - \tfrac{1}{2\sigma} \le R^0 \le \frac{q^0(s)-\mu_1}{\sigma},\ s - \tfrac{1}{2\sigma} \le S^0 < s + \tfrac{1}{2\sigma}\}$$

$$P\{r_o - \tfrac{1}{2\sigma} \le R^0 \le r_1 + \tfrac{1}{2\sigma},\ s_o - \tfrac{1}{2\sigma} \le S^0 < s_1 + \tfrac{1}{2\sigma}\}$$

1. Zu $(r,s) \in \Omega_2$ existiert $(k_1,k_2) \in \Omega$ mit $r = \frac{k_1-\mu_1}{\sigma}$ und $s = \frac{k_1+k_2-\mu_1-\mu_2}{\sigma}$; wegen der Unabhängigkeit von X_1 und X_2 gilt dann

$$(3.6) \qquad P\{R = r,\ S = s\} = P\{X_1 = k_1\}P\{X_2 = k_2\}.$$

Es sei $\sigma_i^2 = n_i p_i (1-p_i)$, $x_i = \frac{k_i-\mu_i}{\sigma_i}$ $(i=1,2)$. Dann gilt $\sigma_i \xrightarrow[\sigma\to\infty]{} \infty$ für $i = 1,2$ und deshalb

$$(3.7) \qquad P\{X_i=k_i\} = \phi(x_i)\Big\{\frac{1}{\sigma_i} + \frac{1}{\sigma_i^2}\frac{1}{6}(1-2p_i)(x_i^3-3x_i)$$

$$+ \frac{1}{\sigma_i^3}\frac{1}{72}\big\{(1-2p_i)^2x_i^6 - 6(2-7p_i+7p_i^2)x_i^4$$

$$+ 9(3-8p_i+8p_i^2)x_i^2 - 6(1-p_i+p_i^2)\big\}$$

$$+ o(\sigma_i^{-3})\Big\}.$$

Diese Entwicklung findet man bei Knüsel ((1972), S.4) für $n_i \to \infty$ und p_i fest, sie gilt aber auch allgemeiner für $\sigma_i \to \infty$ (vgl. Molenaar (1973), S.72ff.).

Man berechnet

$$p_1 = p + \frac{1}{\sigma} \frac{dp(1-p)}{2\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}$$

$$p_2 = p - \frac{1}{\sigma} \frac{dp(1-p)}{2\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}$$

und daraus

$$\sigma_1 = \sigma\sqrt{g}$$

$$\sigma_2 = \sigma\sqrt{h}$$

(3.8)

$$x_1 = r\sqrt{g}$$

$$x_2 = (s-r)\sqrt{h}$$

mit

$$g = \lambda\left(1 + \frac{1}{\sigma} \frac{d(1-2p)}{2\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} - \frac{1}{\sigma^2} \frac{d^2p(1-p)}{4\lambda(1-\lambda)}\right)$$

(3.9)

$$h = (1-\lambda)\left(1 - \frac{1}{\sigma} \frac{d(1-2p)}{2\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} - \frac{1}{\sigma^2} \frac{d^2p(1-p)}{4\lambda(1-\lambda)}\right).$$

Aus (3.6), (3.7) und (3.8) folgt für $\sigma \to \infty$

$$P\{r - \frac{1}{2\sigma} \le R^0 \le r + \frac{1}{2\sigma},\ s - \frac{1}{2\sigma} \le S^0 < s + \frac{1}{2\sigma}\} =$$

$$= P\{R = r,\ S = s\}$$

$$(3.10) \qquad = \phi\left(\frac{r}{\sqrt{g}}\right)\phi\left(\frac{s-r}{\sqrt{h}}\right)\frac{1}{\sqrt{gh}}\,\frac{1}{\sigma^2}\Big(1 + \frac{1}{\sigma}\,\frac{1}{6}(\alpha_1 r^3+\alpha_2 r^2+\alpha_3 r+\alpha_4)$$

$$+ \frac{1}{\sigma^2}\,\frac{1}{72}(\alpha_5 r^6+\alpha_6 r^5+\alpha_7 r^4+\alpha_8 r^3$$

$$+ \alpha_9 r^2+\alpha_{10} r+\alpha_{11})$$

$$+ o(\sigma^{-2})\Big),$$

wobei die α_i Polynome in s sind mit Koeffizienten, die von p_1, p_2, g und h abhängen. α_1 bis α_{11} sind im Anhang in Tabelle I aufgeführt.

2. Es sei $(v,s) \in \Omega_2$, g und h wie in (3.9). Für $k = 0,1,\ldots,6$ definieren wir:

$$g_k(y) = y^k \phi\left(\frac{y}{\sqrt{g}}\right)\phi\left(\frac{s-y}{\sqrt{h}}\right)\frac{1}{\sqrt{gh}} \qquad y \in \mathbb{R}$$

$$G_k(y) = \int_{-\infty}^{y} g_k(x)\,dx \qquad y \in \mathbb{R}$$

$$L_k = \frac{1}{\sigma} \sum_{r_o \le r \le v} g_k(r).$$

Aus der Entwicklung (3.10) folgt für $\sigma \to \infty$

$$(3.11) \qquad \sum_{r_o \le r \le v} P\{R = r,\ S = s\} =$$

$$= \frac{1}{\sigma}L_0 + \frac{1}{\sigma^2}\,\frac{1}{6}(\alpha_1 L_3+\alpha_2 L_2+\alpha_3 L_1+\alpha_4 L_0)$$

$$+ \frac{1}{\sigma^3}\,\frac{1}{72}(\alpha_5 L_6+\alpha_6 L_5+\alpha_7 L_4+\alpha_8 L_3+\alpha_9 L_2+\alpha_{10} L_1+\alpha_{11} L_0)$$

$$+ o(\sigma^{-3})$$

mit $\alpha_1 - \alpha_{11}$ wie in Tabelle I. Wir wollen eine andere Darstellung für die L_k finden.

Es gilt

$$(3.12) \qquad G_k(y) = \phi\left(\frac{s}{\sqrt{g+h}}\right)\frac{1}{\sqrt{g+h}} \int_{-\infty}^{y_1} \left(\frac{x\sqrt{(g+h)gh} + sg}{g+h}\right)^k \phi(x)\,dx$$

mit

$$y_1 = \frac{y(g+h)-sg}{\sqrt{(g+h)gh}} .$$

Für

$$T_i(y_1) = \int_{-\infty}^{y_1} x^i \phi(x)\,dx \qquad i=0,1,\ldots,6$$

berechnet man

$$T_0(y_1) = \Phi(y_1)$$

$$T_1(y_1) = -\phi(y_1)$$

$$T_2(y_1) = -y_1\phi(y_1) + \Phi(y_1)$$

$$T_3(y_1) = -y_1^2\phi(y_1) - 2\phi(y_1)$$

$$T_4(y_1) = -y_1^3\phi(y_1) - 3y_1\phi(y_1) + 3\Phi(y_1)$$

$$T_5(y_1) = -y_1^4\phi(y_1) - 4y_1^2\phi(y_1) - 8\phi(y_1)$$

$$T_6(y_1) = -y_1^5\phi(y_1) - 5y_1^3\phi(y_1) - 15y_1\phi(y_1) + 15\Phi(y_1)$$

(vgl. Molenaar (1973), S.124) und erhält so aus (3.12)

$$(3.13)\qquad G_k(y) = \phi\Big(\frac{s}{\sqrt{g+h}}\Big)\frac{1}{\sqrt{g+h}}\Big(\beta_k\Phi(y_1) + \sum_{i=0}^{k-1}\beta_{ki}y_1^i\phi(y_1)\Big) \qquad y\in\mathbb{R},$$

wobei die β_k und β_{ki} von g, h und s abhängen.

Für $y = -\ln\sigma+o(1)$ gilt $\Phi(y_1) = o(\sigma^{-2})$, $y_1^i\phi(y_1) = o(\sigma^{-2})$ $(i=0,1,\ldots,6)$ und wegen (3.13) $G_k(y) = o(\sigma^{-2})$ $(k=0,1,\ldots,6)$. Da $r_o - \frac{1}{2\sigma} = -\ln\sigma + o(1)$, folgt

$$G_k(v+\tfrac{1}{2\sigma}) = G_k(v+\tfrac{1}{2\sigma}) - G_k(r_o-\tfrac{1}{2\sigma}) + o(\sigma^{-2})$$

$$(3.14)\qquad = \sum_{r_o\le r\le v}\big\{G_k(r+\tfrac{1}{2\sigma}) - G_k(r-\tfrac{1}{2\sigma})\big\} + o(\sigma^{-2}).$$

Entwickelt man $G_k(r+\frac{1}{2\sigma})$ und $G_k(r-\frac{1}{2\sigma})$ um r, so findet man

$$(3.15)\qquad G_k(r+\tfrac{1}{2\sigma}) - G_k(r-\tfrac{1}{2\sigma}) =$$

$$= \frac{1}{\sigma}g_k(r) + \frac{1}{\sigma^3}\frac{1}{24}\Big(k(k-1)g_{k-2}(r) + 2k\frac{s}{h}g_{k-1}(r)$$

$$+ \Big(\frac{s^2}{h^2} - (2k+1)\big(\frac{1}{g}+\frac{1}{h}\big)\Big)g_k(r)$$

$$- 2\frac{s}{h}\big(\frac{1}{g}+\frac{1}{h}\big)g_{k+1}(r) + \big(\frac{1}{g}+\frac{1}{h}\big)^2 g_{k+2}(r)\Big)$$

$$+ o(\sigma^{-3}).$$

Aus (3.14) und (3.15) folgt dann für $k = 0,1,\ldots,6$

$$G_k(v+\frac{1}{2\sigma}) = L_k + \frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{24}\Big\{k(k-1)L_{k-2} + 2k\frac{s}{h}L_{k-1}$$

$$+ \{\frac{s^2}{h^2} - (2k+1)(\frac{1}{g}+\frac{1}{h})\}L_k$$

$$- 2\frac{s}{h}(\frac{1}{g}+\frac{1}{h})L_{k+1} + (\frac{1}{g}+\frac{1}{h})^2 L_{k+2}\Big\}$$

$$+ o(\sigma^{-2})$$

und wegen $L_k = G_k(v+\frac{1}{2\sigma}) + o(1)$

$$(3.16)\quad L_k = G_k(v+\frac{1}{2\sigma}) - \frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{24}\Big\{k(k-1)G_{k-2}(v+\frac{1}{2\sigma}) + 2k\frac{s}{h}G_{k-1}(v+\frac{1}{2\sigma})$$

$$+ \{\frac{s^2}{h^2} - (2k+1)(\frac{1}{g}+\frac{1}{h})\}G_k(v+\frac{1}{2\sigma})$$

$$- 2\frac{s}{h}(\frac{1}{g}+\frac{1}{h})G_{k+1}(v+\frac{1}{2\sigma})$$

$$+ (\frac{1}{g}+\frac{1}{h})^2 G_{k+2}(v+\frac{1}{2\sigma})\Big\}$$

$$+ o(\sigma^{-2}).$$

Aus (3.11), (3.16) und (3.13) erhält man schließlich für $\sigma\to\infty$

$$(3.17)\quad P\{r_o - \frac{1}{2\sigma} \le R^0 \le v+\frac{1}{2\sigma},\ s-\frac{1}{2\sigma} \le S^0 < s+\frac{1}{2\sigma}\} =$$

$$= \sum_{r_o \le r \le v} P\{R = r,\ S = s\}$$

$$= \phi(\frac{s}{\sqrt{g+h}})\frac{1}{\sqrt{g+h}}\frac{1}{\sigma}\Big\{\phi(v_2) +$$

$$+ \frac{1}{\sigma}\frac{1}{6}\left(\Phi(v_2)\Gamma_1(s) + \phi(v_2)\Gamma_3(v_1,s)\right)$$

$$+ \frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{72}\left(\Phi(v_2)\Gamma_2(s) + \phi(v_2)\Gamma_4(v_1,s)\right)$$

$$+ o(\sigma^{-2})\Big)$$

wobei

$$v_1 = v + \frac{1}{2\sigma}$$

$$v_2 = \frac{v_1(g+h)-sg}{\sqrt{(g+h)gh}}$$

$$\Gamma_1(s) = \gamma_1 s^3 + \gamma_2 s$$

$$\Gamma_2(s) = (1-2p)^2 s^6 - 6(2-7p+7p^2)s^4 + 9(3-8p+8p^2)s^2$$

$$- 6(1-p+p^2)$$

$$\Gamma_3(v_1,s) = v_1^2\gamma_3 + v_1\gamma_4 s + \gamma_5 s^2 + \gamma_6$$

$$\Gamma_4(v_1,s) = v_1^5\gamma_7 + v_1^4\gamma_8 s + v_1^3(\gamma_9 s^2+\gamma_{10}) + v_1^2(\gamma_{11}s^3+\gamma_{12}s)$$

$$+ v_1(\gamma_{13}s^4+\gamma_{14}s^2+\gamma_{15}) + \gamma_{16}s^5+\gamma_{17}s^3+\gamma_{18}s\,.$$

Die Koeffizienten γ_1 bis γ_{18} hängen ab von p_1, p_2, g und h; sie sind im Anhang in Tabelle II aufgeführt.

3. Es sei $s \in \Omega_2^S$ und

$$H(x) = P\{r_o - \frac{1}{2\sigma} \le R^0 \le x,\ s - \frac{1}{2\sigma} \le S^0 < s + \frac{1}{2\sigma}\} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Für $w \in \mathbb{R}$, $r_o - \frac{1}{2\sigma} \le w \le r_1 + \frac{1}{2\sigma}$, gilt

$$(3.18) \quad H(w) = H(w_o) + P_1(\mu_1+w\sigma+\tfrac{1}{2})\,(H(w_o+\tfrac{1}{\sigma})-H(w_o))$$

mit $w_o = w - \frac{1}{\sigma}P_1(\mu_1+w\sigma+\frac{1}{2})$. Die Entwicklung von H ist in Teil 2 hergeleitet für Argumente der Form $v+\frac{1}{2\sigma}$, $v \in \Omega_2^R$. Da w_o und $w_o+\frac{1}{\sigma}$ diese Form besitzen, erhält man aus (3.17) und (3.18) für $\sigma \to \infty$ die Entwicklung

$$(3.19) \quad P\{r_o - \tfrac{1}{2\sigma} \le R^0 \le w,\ s - \tfrac{1}{2\sigma} \le S^0 < s + \tfrac{1}{2\sigma}\} =$$

$$= \phi\Big(\frac{s}{\sqrt{g+h}}\Big)\frac{1}{\sqrt{g+h}}\,\frac{1}{\sigma}\Big[\Phi(w_1)$$

$$+ \frac{1}{\sigma}\,\frac{1}{6}\big(\phi(w_1)\Gamma_1(s) + \phi(w_1)\Gamma_3(w,s)\big)$$

$$+ \frac{1}{\sigma^2}\,\frac{1}{72}\big(\phi(w_1)\Gamma_2(s)$$

$$+ \phi(w_1)\Big(\Gamma_4(w,s) + 72P_2(\mu_1+w\sigma+\tfrac{1}{2})\frac{w-s\lambda}{(\lambda(1-\lambda))^{\frac{1}{2}}}\Big)\big)$$

$$+ o(\sigma^{-2})\Big]$$

wobei $w_1 = \dfrac{w(g+h)-sg}{\sqrt{(g+h)gh}}$ und Γ_1 bis Γ_4 wie in (3.17).

4. Zu $s \in \Omega_2^S$ existiert $k \in \mathbb{Z}$ mit $q^0(s) = q^0(1-\alpha, s\sigma+\mu_1+\mu_2, n_1, n) = q^0(1-\alpha, k, n_1, n)$. Es sei $\tau^2 = k\,\frac{n_1}{n}\,\frac{n_2}{n}\,\frac{n-k}{n}$. Dann erhält man für

$$t_1(s) = \frac{q^0(s)-\mu_1}{\sigma}$$

und

$$t_2(s) = \frac{t_1(s)(g+h)-sg}{\sqrt{(g+h)gh}}$$

wegen $\tau \xrightarrow[\sigma\to\infty]{} \infty$ aus Satz 3 die Entwicklungen

$$(3.20) \qquad t_1(s) = s\delta_1+\delta_2 + \frac{1}{\sigma}(s\delta_3+\delta_4) + o(\sigma^{-1})$$

$$(3.21) \qquad t_2(s) = z-d + \frac{1}{\sigma}(s\delta_5+\delta_6)$$

$$+ \frac{1}{\sigma^2}(s^2\delta_7+s\delta_8+\delta_9 - \frac{z}{\lambda(1-\lambda)} P_2(s\nu_1+\nu_2))$$

$$+ o(\sigma^{-2}) ;$$

dabei ist z das $(1-\alpha)$-Quantil von Φ, ν_1 und ν_2 sind wie in Satz 4 definiert. δ_1 bis δ_9 sind Polynome in d, deren Koeffizienten von λ, p und z abhängen. Sie werden im Anhang in Tabelle III aufgeführt.

Aus (3.19), (3.20) und (3.21) folgt für $\sigma\to\infty$

$$(3.22) \qquad P\{r_o - \frac{1}{2\sigma} \le R^0 \le \frac{q^0(s)-\mu_1}{\sigma}, \; s - \frac{1}{2\sigma} \le S^0 < s + \frac{1}{2\sigma}\} =$$

$$= \phi\left(\frac{s}{\sqrt{g+h}}\right)\frac{1}{\sqrt{g+h}} \frac{1}{\sigma}\Big\{\Phi(z-d)$$

$$+ \frac{1}{\sigma}\frac{1}{6}\left(\Phi(z-d)\Gamma_1(s) + \phi(z-d)\Lambda_1(s)\right)$$

$$+ \frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{72}\left(\Phi(z-d)\Gamma_2(s) + \phi(z-d)\Lambda_2(s)\right)$$

$$+ o(\sigma^{-2})\Big\}$$

mit

$$\Lambda_1(s) = s^2\lambda_1 + s\lambda_2 + \lambda_3$$

$$\Lambda_2(s) = s^5\lambda_4 + s^4\lambda_5 + s^3\lambda_6 + s^2\lambda_7 + s\lambda_8 + \lambda_9 - \frac{72d}{\lambda(1-\lambda)} P_2(s\nu_1+\nu_2),$$

Γ_1, Γ_2 wie in (3.19) und ν_1, ν_2 wie in Satz 4. λ_1 bis λ_9 sind Tabelle IV im Anhang zu entnehmen.

5. Es seien g, h, ν_1 und ν_2 wie oben. Für k = 0,1,...,6 definieren wir

$$h_k(y) = y^k \phi\left(\frac{y}{\sqrt{g+h}}\right)\frac{1}{\sqrt{g+h}} \qquad y \in \mathbb{R}$$

$$H_k(y) = \int_{-\infty}^{y} h_k(x)dx \qquad y \in \mathbb{R}$$

$$M_k = \frac{1}{\sigma} \sum_{s \in \Omega_2^S} h_k(s)$$

$$K = \sum_{s \in \Omega_2^S} \frac{1}{\sigma}\phi(s)P_2(s\nu_1+\nu_2).$$

In der Entwicklung von

$$\sum_{s \in \Omega_2^S} P\{r_o - \frac{1}{2\sigma} \le R^0 \le \frac{q^0(s)-\mu_1}{\sigma},\ s - \frac{1}{2\sigma} \le S^0 < s + \frac{1}{2\sigma}\}$$

treten die Terme M_k (k=0,1,...,6) und K auf. Diese werden im

folgenden vereinfacht.

Wie im Teil 2 des Beweises zeigt man $H_k(s_o - \frac{1}{2\sigma}) = o(\sigma^{-2})$; aus Symmetriegründen folgt dann $\int_{s_1+\frac{1}{2\sigma}}^{\infty} h_k(x)dx = o(\sigma^{-2})$. Somit gilt

$$(3.23)\quad \int_{-\infty}^{\infty} h_k(x)dx = H_k(s_1+\tfrac{1}{2\sigma}) - H_k(s_o-\tfrac{1}{2\sigma}) + o(\sigma^{-2})$$

$$= \sum_{s\in\Omega_2^S} \left(H_k(s+\tfrac{1}{2\sigma}) - H_k(s-\tfrac{1}{2\sigma})\right) + o(\sigma^{-2}).$$

Wegen

$$(3.24)\quad H_k(s+\tfrac{1}{2\sigma}) - H_k(s-\tfrac{1}{2\sigma}) = \frac{1}{\sigma} h_k(s)$$

$$+ \frac{1}{\sigma^3}\frac{1}{24}\left(k(k-1)h_{k-2}(s) - \frac{2k+1}{g+h} h_k(s) + \frac{1}{(g+h)^2} h_{k+2}(s)\right)$$

$$+ o(\sigma^{-3})$$

erhält man aus (3.23) für $k = 0,1,\ldots,6$

$$M_k = \int_{-\infty}^{\infty} h_k(x)dx$$

$$- \frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{24}\left(k(k-1)\int_{-\infty}^{\infty} h_{k-2}(x)dx - \frac{2k+1}{g+h}\int_{-\infty}^{\infty} h_k(x)dx\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(g+h)^2}\int_{-\infty}^{\infty} h_{k+2}(x)dx\right)$$

$$+ o(\sigma^{-2}).$$

Berechnet man die Integrale, so findet man

$$M_0 = 1 + o(\sigma^{-2})$$

$$M_1 = o(\sigma^{-1})$$

$$M_2 = g+h + o(\sigma^{-1})$$

(3.25) $$M_3 = o(\sigma^{-1})$$

$$M_4 = 3(g+h)^2 + o(\sigma^{-1})$$

$$M_5 = o(\sigma^{-1})$$

$$M_6 = 15(g+h)^3 + o(\sigma^{-1}).$$

$K = \sum_{s \in \Omega_2^S} \frac{1}{\sigma}\phi(s)P_2(s\nu_1+\nu_2)$ kann nicht wie M_k vereinfacht werden, da eine zu (3.24) analoge Entwicklung unmöglich ist. Zu $s \in \Omega_2^S$ existiert nach dem Mittelwertsatz $s_2 \in \left[s - \frac{1}{2\sigma}, s + \frac{1}{2\sigma}\right]$ mit

$$\int_{s-\frac{1}{2\sigma}}^{s+\frac{1}{2\sigma}} \phi(x)P_2(x\nu_1+\nu_2)dx = \frac{1}{\sigma}\phi(s_2)P_2(s_2\nu_1+\nu_2),$$

$\frac{1}{\sigma}\phi(s_2)P_2(s_2\nu_1+\nu_2)$ ist aber verschieden von $\frac{1}{\sigma}\phi(s)P_2(s\nu_1+\nu_2) + o(\sigma^{-1})$. Offensichtlich gilt

(3.26) $$K = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sigma}\phi(s(k))P_2(\nu_1 s(k)+\nu_2) + o(1)$$

wobei $s(k) = \frac{k-n_1p_1-n_2p_2}{\sigma}$.

Aus (3.22), (3.25) und (3.26) folgt für $\sigma \to \infty$

$$(3.27) \qquad \sum_{s \in \Omega_2^S} P\{r_o - \frac{1}{2\sigma} \le R^0 \le \frac{q^0(s)-\mu_1}{\sigma},\ s - \frac{1}{2\sigma} \le S^0 < s + \frac{1}{2\sigma}\} =$$

$$= \Phi(z-d) - \frac{1}{\sigma} A_1(d) - \frac{1}{\sigma^2} A_2(d) + o(\sigma^{-2})$$

mit A_1 und A_2 wie in Satz 4.

Eine einfachere Darstellung von K erhält man mit der zusätzlichen Voraussetzung λ konstant für $\sigma \to \infty$. Es sei $\lambda = \frac{\kappa_1}{\kappa}$ mit $\kappa_1, \kappa \in \mathbb{N}$, κ_1 und κ teilerfremd und

$$Z_i = \{s \in \Omega_2^S \mid s = \frac{\kappa j+i-\mu_1-\mu_2}{\sigma},\ j \in \mathbb{Z}\} \qquad i=0,1,\ldots,\kappa-1$$

$$K_i = \sum_{s \in Z_i} \frac{1}{\sigma}\phi(s)P_2(s\nu_1+\nu_2) \qquad i=0,1,\ldots,\kappa-1.$$

Beachtet man $\nu_1 = \sigma\delta_1+\delta_3$ (δ_1 und δ_3 aus Tabelle III im Anhang) und geht vor analog zu (3.23) und (3.24), so findet man

$$K_i = \sum_{s \in Z_i} \frac{1}{\sigma}\phi(s)P_2(\lambda i+\delta_3 s+\nu_3)$$

$$= \frac{1}{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)P_2(\lambda i+\delta_3 x+\nu_3)dx + o(1)$$

mit $\nu_3 = \nu_2-\lambda(\mu_1+\mu_2)$. Da κ_1 und κ teilerfremd sind, folgt

$$K = \sum_{i=0}^{\kappa-1} K_i$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \frac{1}{\kappa} \sum_{i=0}^{\kappa-1} P_2(\lambda i + \delta_3 x + \nu_3)\,dx + o(1)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \frac{1}{\kappa} \sum_{i=0}^{\kappa-1} P_2(\tfrac{i}{\kappa} + \delta_3 x + \nu_3)\,dx + o(1).$$

Wegen

$$\sum_{i=0}^{\kappa-1} P_2(\tfrac{i}{\kappa} + \delta_3 x + \nu_3) = \frac{1}{\kappa} P_2(\kappa\delta_3 x + \kappa\nu_3) + \frac{1}{12\kappa} - \frac{\kappa}{12} \qquad x \in \mathbb{R}$$

gilt schließlich

$$K = \frac{1}{\kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \left(P_2(\rho_1 x + \rho_2) + \frac{1}{12}\right) dx - \frac{1}{12} + o(1)$$

wobei $\rho_1 = \kappa\delta_3$, $\rho_2 = \kappa\nu_3$.

6. Es sei $s \in \Omega_2^S$, $r_2 = r_1 + \frac{1}{2\sigma}$ und $r_3 = \dfrac{r_2(g+h) - sg}{\sqrt{(g+h)gh}}$. Wegen $\Phi(r_3) = 1 + o(\sigma^{-2})$ und $r_2^k \phi(r_3) = o(\sigma^{-2})$ für $k = 0,1,\ldots,5$ erhält man aus (3.17) für $\sigma \to \infty$

$$P\{r_o - \tfrac{1}{2\sigma} \le R^0 \le r_1 + \tfrac{1}{2\sigma},\ s - \tfrac{1}{2\sigma} \le S^0 < s + \tfrac{1}{2\sigma}\} =$$

$$= \phi\left(\frac{s}{\sqrt{g+h}}\right) \frac{1}{\sqrt{g+h}} \frac{1}{\sigma}\left(1 + \frac{1}{\sigma}\frac{1}{6}\Gamma_1(s) + \frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{72}\Gamma_2(s) + o(\sigma^{-2})\right)$$

mit Γ_1 und Γ_2 wie in (3.17).

Wie im Teil 5 des Satzes zeigt man dann

$$P\{r_o - \tfrac{1}{2\sigma} \le R^0 \le r_1 + \tfrac{1}{2\sigma},\ s_o - \tfrac{1}{2\sigma} \le S^0 < s_1 + \tfrac{1}{2\sigma}\} =$$

$$= \sum_{s \in \Omega_2^S} P\{r_o - \tfrac{1}{2\sigma} \le R^0 \le r_1 + \tfrac{1}{2\sigma},\ s - \tfrac{1}{2\sigma} \le S^0 < s + \tfrac{1}{2\sigma}\}$$

$$= 1 + o(\sigma^{-2}).$$

Daraus folgt

$$g_1(n_1, n_2, p_1, p_2, \alpha) =$$

$$= 1 - \sum_{s \in \Omega_1^S} P\{R^0 \le \frac{q^0(s) - \mu_1}{\sigma},\ s - \tfrac{1}{2\sigma} \le S^0 < s + \tfrac{1}{2\sigma}\}$$

$$= 1 - \sum_{s \in \Omega_2^S} P\{r_o - \tfrac{1}{2\sigma} \le R^0 \le \frac{q^0(s) - \mu_1}{\sigma}, s - \tfrac{1}{2\sigma} \le S^0 < s + \tfrac{1}{2\sigma}\}$$

$$+ o(\sigma^{-2})$$

und daraus mit (3.27) schließlich die Behauptung des Satzes.

Für die Gütefunktion des Tests von Fisher-Yates hat Albers (1974) eine Entwicklung mit einem Restglied der Ordnung $o(\sigma^{-1})$ hergeleitet. Die Unterschiede zu unserer Entwicklung erklären sich dadurch, daß er p_1 und p_2 nicht symmetrisch behandelt; korrigiert man dies, so sind die Entwicklungen bis zum Restglied der Ordnung $o(\sigma^{-1})$ identisch.

Y_1, Y_2 seien unabhängige poissonverteilte Zufallsgrößen mit den

Parametern λ_1 und λ_2. Zu testen sei $\lambda_1 \leq \lambda_2$ gegen $\lambda_1 > \lambda_2$. Zu diesem Testproblem existiert unter allen unverfälschten Tests zum Niveau α ein gleichmäßig mächtigster Test (vgl. Lehmann (1959), S. 140 ff.). Er ist charakterisiert durch die Testfunktion

$$\psi_P(k_1,k_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k_1 > q_P \\ \delta_P & \text{falls } k_1 = q_P \\ 0 & \text{falls } k_1 < q_P \end{cases} \qquad (k_1,k_2) \in \Omega_P,$$

dabei ist $q_P = q_P(1-\alpha,k)$ das $(1-\alpha)$-Quantil der Binomialverteilung mit den Parametern $k = k_1+k_2$ und $\frac{1}{2}$, Ω_P der Stichprobenraum von (Y_1,Y_2). $\delta_P = \delta_P(1-\alpha,k)$ wird bestimmt aus

$$\sum_{i=q_P+1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \delta_P \binom{k}{q_P} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \alpha.$$

Knüsel (1978) hat eine asymptotische Entwicklung der Gütefunktion dieses Tests hergeleitet. Setzt man in (3.4) $p = 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda_P = \lambda_1+\lambda_2$ für σ^2 und $d_P = \dfrac{\lambda_1-\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1+\lambda_2}}$ für d, so erhält man die von Knüsel gefundene Entwicklung

$$g_P(\lambda_1,\lambda_2,\alpha) = 1 - \Phi(z-d_P) + \frac{\phi(z-d_P)}{24\lambda_P} A_P(d_P) + o(\lambda_P^{-1})$$

mit

$$A_P(d_P) = 3d_P^3 + zd_P^2 + (-2z^2 - 5 + 24\, I_P)\, d_P$$

$$I_P = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \left(P_2\left(\frac{z}{2}x + z\sqrt{\lambda}\right) + \frac{1}{12}\right) dx.$$

3.2 Anwendungen

Aus der Entwicklung (3.4) gewinnen wir für die Gütefunktion g_1 des Tests von Fisher-Yates die drei Näherungen

$$\Delta_{11} = 1 - \Phi(z-d)$$

$$\Delta_{12} = 1 - \Phi(z-d) + \frac{1}{\sigma} A_1(d)$$

$$\Delta_{13} = 1 - \Phi(z-d) + \frac{1}{\sigma} A_1(d) + \frac{1}{\sigma^2} A_2(d);$$

A_1 und A_2 sind definiert wie in Satz 4.

Die Koeffizienten a_1 - a_7 sind bis auf den Summanden $576\, I_1$ in a_7 Polynome in a, b und z. I_1 ist entstanden durch die Summierung von Termen, die mit der Randomisierung zusammenhängen. Betrachten wir I_1 im Spezialfall λ konstant für $\sigma \to \infty$ etwas genauer. Man erhält die Abschätzung $-0{,}09375 \leq I_1 \leq -0{,}0625$; die untere Schranke wird z.B. angenommen für $n_1=n_2=18$, $p_1=p_2=0{,}5$, $\alpha=0{,}5$, die obere z.B. für $n_1=n_2=18$, $p_1=p_2=0{,}5$, $\alpha=0{,}00621$ $(z=2{,}5)$. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß I_1 unstetig von λ abhängt.

In den Tabellen 16 - 27 erhält man einen ersten Eindruck von der Güte der Näherungen. Die dort erfaßten Parameterkonstellationen sind in Tabelle 15 zusammengestellt.

Tab. 15:

n_1	n_2	p	α	λ	σ
18	18	0,5	0,01	0,5	3
72	72	0,5	0,01	0,5	6
12	24	0,5	0,01	0,3333	3
48	96	0,5	0,01	0,3333	6
24	24	0,25	0,01	0,5	3
96	96	0,25	0,01	0,5	6
16	32	0,25	0,01	0,3333	3
64	128	0,25	0,01	0,3333	6
50	50	0,1	0,01	0,5	3
200	200	0,1	0,01	0,5	6
33	67	0,1	0,01	0,33	3
132	268	0,1	0,01	0,33	6

Der Aufbau der Tabellen ist stets gleich. In den ersten drei Spalten sind Werte von d, p_1 und p_2; p_1 und p_2 sind so ausgewählt, daß p konstant ist. In Spalte 4 findet man die exakten Werte der Gütefunktion, in den Spalten 5, 7 und 9 die Werte von Δ_{11}, $\frac{1}{\sigma} A_1(d)$ und $\frac{1}{\sigma^2} A_2(d)$[1]. In den Spalten 6, 8 und 10 stehen die Differenzen der beiden vorangegangenen Spalten, d.h. die Fehler der Näherungen Δ_{11}, Δ_{12} und Δ_{13}. Die Werte in den Spalten 6 - 10 sind in Einheiten der fünften Dezimalstelle nach dem Komma angegeben.

Der Term $\frac{1}{\sigma} A_1(d)$ ist der asymptotische Fehler der Näherung Δ_{11}. $\frac{1}{\sigma} A_1(d)$ verschwindet für $n_1=n_2$ (d.h. $\lambda=0,5$) oder für $p=0,5$ und wird absolut um so größer, je näher λ und p bei 0 oder 1 liegen. In den Tabellen 16 - 27 sehen wir, daß auch der tatsächliche absolute Fehler dieses Verhalten zeigt. Sein Maximum ist 0,1364

1) I_1 in $A_2(d)$ wird berechnet nach (3.5)

für $\sigma=3$ (Tabelle 26) und 0,0309 für $\sigma=6$ (Tabelle 27), es ist zu finden in den Tabellen mit den kleinsten Werten für p und λ.

Die Werte der Spalten 4 - 10 aus den Tabellen 16 - 27 mit $\sigma=6$ sind in den Figuren 3 - 8 als Funktion von d dargestellt.

Tab. 16: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Tests von Fisher-Yates

$n_1 = 18$ $n_2 = 18$ $p = 0{,}5$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_1	Δ_{11}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}A_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}A_2(d)$	(8)-(9)
-.60	.4500	.5500	.00180	.00171	8	0	8	5	3
-.30	.4750	.5250	.00442	.00432	11	0	11	7	4
0.00	.5000	.5000	.01000	.01000	0	0	0	0	0
.30	.5250	.4750	.02090	.02136	-46	0	-46	-33	-13
.60	.5500	.4500	.04054	.04214	-160	0	-160	-115	-45
.90	.5750	.4250	.07324	.07688	-364	0	-364	-257	-107
1.20	.6000	.4000	.12359	.13001	-642	0	-642	-433	-209
1.50	.6250	.3750	.19525	.20430	-905	0	-905	-556	-350
1.80	.6500	.3500	.28940	.29932	-992	0	-992	-488	-504
2.10	.6750	.3250	.40323	.41047	-724	0	-724	-106	-618
2.40	.7000	.3000	.52929	.52936	-7	0	-7	617	-624
2.70	.7250	.2750	.65632	.64567	1065	0	1065	1554	-490
3.00	.7500	.2500	.77169	.74973	2196	0	2196	2455	-259
3.30	.7750	.2250	.86494	.83489	3005	0	3005	3052	-47
3.60	.8000	.2000	.93079	.89861	3219	0	3219	3191	28
3.90	.8250	.1750	.97043	.94222	2821	0	2821	2887	-66
4.20	.8500	.1500	.99002	.96951	2051	0	2051	2296	-245
4.50	.8750	.1250	.99755	.98513	1242	0	1242	1620	-378
4.80	.9000	.1000	.99962	.99331	631	0	631	1020	-389
5.10	.9250	.0750	.99997	.99723	274	0	274	576	-302
5.40	.9500	.0500	1.00000	.99894	106	0	106	292	-187

Tab. 17: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Tests von Fisher-Yates

$n_1 = 72$ $n_2 = 72$ $p = 0{,}5$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_1	Δ_{11}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}A_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}A_2(d)$	(8)-(9)
-.60	.4750	.5250	.00173	.00171	2	0	2	1	0
-.30	.4875	.5125	.00434	.00432	2	0	2	2	0
0.00	.5000	.5000	.01000	.01000	0	0	0	0	0
.30	.5125	.4875	.02126	.02136	-10	0	-10	-9	-2
.60	.5250	.4750	.04178	.04214	-36	0	-36	-30	-6
.90	.5375	.4625	.07607	.07688	-81	0	-81	-68	-13
1.20	.5500	.4500	.12860	.13001	-141	0	-141	-115	-26
1.50	.5625	.4375	.20237	.20430	-193	0	-193	-151	-42
1.80	.5750	.4250	.29732	.29932	-200	0	-200	-139	-61
2.10	.5875	.4125	.40922	.41047	-125	0	-125	-49	-76
2.40	.6000	.4000	.52981	.52936	46	0	46	128	-83
2.70	.6125	.3875	.64851	.64567	284	0	284	361	-77
3.00	.6250	.3750	.75499	.74973	526	0	526	588	-62
3.30	.6375	.3625	.84186	.83489	698	0	698	741	-43
3.60	.6500	.3500	.90612	.89861	751	0	751	780	-29
3.90	.6625	.3375	.94908	.94222	686	0	686	710	-23
4.20	.6750	.3250	.97494	.96951	542	0	542	566	-24
4.50	.6875	.3125	.98888	.98513	375	0	375	400	-25
4.80	.7000	.3000	.99559	.99331	228	0	228	253	-25
5.10	.7125	.2875	.99845	.99723	122	0	122	143	-21
5.40	.7250	.2750	.99952	.99894	58	0	58	73	-15

Tab. 18: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Tests von Fisher-Yates

$n_1 = 12$ $n_2 = 24$ $p = 0{,}5$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_1	Δ_{11}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}A_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}A_2(d)$	(8)-(9)
-.57	.4500	.5500	.00204	.00191	13	0	13	12	1
-.28	.4750	.5250	.00468	.00454	14	0	14	14	1
0.00	.5000	.5000	.01000	.01000	0	0	0	0	0
.28	.5250	.4750	.01996	.02050	-54	0	-54	-53	0
.57	.5500	.4500	.03738	.03915	-177	0	-177	-178	1
.85	.5750	.4250	.06580	.06973	-393	0	-393	-396	3
1.13	.6000	.4000	.10915	.11605	-689	0	-689	-694	5
1.41	.6250	.3750	.17092	.18085	-993	0	-993	-996	3
1.70	.6500	.3500	.25298	.26458	-1160	0	-1160	-1161	1
1.98	.6750	.3250	.35442	.36450	-1009	0	-1009	-1029	21
2.26	.7000	.3000	.47059	.47464	-405	0	-405	-502	97
2.55	.7250	.2750	.59317	.58677	640	0	640	387	253
2.83	.7500	.2500	.71137	.69219	1918	0	1918	1450	468
3.11	.7750	.2250	.81442	.78375	3067	0	3067	2413	654
3.39	.8000	.2000	.89440	.85719	3722	0	3722	3027	695
3.68	.8250	.1750	.94852	.91159	3693	0	3693	3171	522
3.96	.8500	.1500	.97947	.94881	3065	0	3065	2884	182
4.24	.8750	.1250	.99376	.97234	2142	0	2142	2321	-179
4.53	.9000	.1000	.99871	.98607	1265	0	1265	1671	-406
4.81	.9250	.0750	.99986	.99347	639	0	639	1084	-445
5.09	.9500	.0500	.99999	.99715	284	0	284	637	-353
5.37	.9750	.0250	1.00000	.99885	115	0	115	340	-225

Tab. 19: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Tests von Fisher-Yates

$n_1 = 48$ $n_2 = 96$ $p = 0,5$ $\alpha = 0,01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_1	Δ_{11}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}A_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}A_2(d)$	(8)-(9)
-.57	.4750	.5250	.00194	.00191	3	0	3	3	0
-.28	.4875	.5125	.00457	.00454	3	0	3	3	0
0.00	.5000	.5000	.01000	.01000	0	0	0	0	0
.28	.5125	.4875	.02038	.02050	-12	0	-12	-13	1
.57	.5250	.4750	.03874	.03915	-41	0	-41	-43	2
.85	.5375	.4625	.06882	.06973	-91	0	-91	-95	4
1.13	.5500	.4500	.11447	.11605	-158	0	-158	-166	8
1.42	.5625	.4375	.17862	.18085	-223	0	-223	-236	13
1.70	.5750	.4250	.26206	.26458	-252	0	-252	-271	19
1.98	.5875	.4125	.36246	.36450	-205	0	-205	-231	26
2.26	.6000	.4000	.47407	.47464	-57	0	-57	-94	36
2.55	.6125	.3875	.58856	.58677	180	0	180	132	48
2.83	.6250	.3750	.69677	.69219	457	0	457	398	60
3.11	.6375	.3625	.79077	.78375	702	0	702	636	66
3.39	.6500	.3500	.86566	.85719	848	0	848	784	64
3.68	.6625	.3375	.92022	.91159	864	0	864	814	50
3.96	.6750	.3250	.95645	.94881	764	0	764	736	28
4.24	.6875	.3125	.97828	.97234	595	0	595	590	5
4.53	.7000	.3000	.99017	.98607	411	0	411	423	-13
4.81	.7125	.2875	.99599	.99347	253	0	253	274	-21
5.09	.7250	.2750	.99854	.99715	139	0	139	161	-22
5.37	.7375	.2625	.99953	.99885	68	0	68	86	-17

Tab. 20: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Tests von Fisher-Yates

$n_1 = 24$ $n_2 = 24$ $p = 0{,}25$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_1	Δ_{11}	(4)-(5)	$n^{-1}A_1(d)$	(6)-(7)	$n^{-2}A_2(d)$	(8)-(9)
-.72	.2050	.2950	.00128	.00116	12	0	12	10	2
-.48	.2200	.2800	.00267	.00251	17	0	17	14	3
-.24	.2350	.2650	.00530	.00514	16	0	16	14	2
0.00	.2500	.2500	.01000	.01000	0	0	0	0	0
.24	.2650	.2350	.01800	.01847	-48	0	-48	-43	-4
.48	.2800	.2200	.03095	.03242	-147	0	-147	-134	-13
.72	.2950	.2050	.05094	.05410	-316	0	-316	-287	-29
.96	.3100	.1900	.08035	.08591	-557	0	-557	-499	-58
1.20	.3250	.1750	.12160	.13001	-841	0	-841	-735	-105
1.44	.3400	.1600	.17676	.18772	-1095	0	-1095	-923	-172
1.68	.3550	.1450	.24698	.25903	-1205	0	-1205	-958	-246
1.92	.3700	.1300	.33194	.34224	-1030	0	-1030	-736	-293
2.16	.3850	.1150	.42942	.43394	-452	0	-452	-192	-260
2.40	.4000	.1000	.53508	.52936	572	0	572	660	-88
2.64	.4150	.0850	.64273	.62311	1962	0	1962	1714	249
2.88	.4300	.0700	.74509	.71009	3500	0	3500	2786	713
3.12	.4450	.0550	.83495	.78630	4864	0	4864	3674	1190
3.36	.4600	.0400	.90659	.84935	5724	0	5724	4213	1511
3.60	.4750	.0250	.95707	.89861	5846	0	5846	4327	1519
3.84	.4900	.0100	.98690	.93494	5196	0	5196	4043	1153

Tab. 21: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Tests von Fisher-Yates

$n = 96$ $n = 96$ $p = 0{,}25$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_1	Δ_{11}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}A_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}A_2(d)$	(8)-(9)
-.72	.2275	.2725	.00118	.00116	2	0	2	2	0
-.48	.2350	.2650	.00254	.00251	4	0	4	3	0
-.24	.2425	.2575	.00517	.00514	4	0	4	3	0
0.00	.2500	.2500	.01000	.01000	0	0	0	0	0
.24	.2575	.2425	.01836	.01847	-11	0	-11	-11	0
.48	.2650	.2350	.03208	.03242	-34	0	-34	-34	0
.72	.2725	.2275	.05337	.05410	-73	0	-73	-72	-1
.96	.2800	.2200	.08465	.08591	-127	0	-127	-125	-2
1.20	.2875	.2125	.12813	.13001	-188	0	-188	-184	-4
1.44	.2950	.2050	.18535	.18772	-237	0	-237	-231	-6
1.68	.3025	.1975	.25655	.25903	-248	0	-248	-240	-9
1.92	.3100	.1900	.34031	.34224	-193	0	-193	-184	-9
2.16	.3175	.1825	.43341	.43394	-53	0	-53	-48	-5
2.40	.3250	.1750	.53106	.52936	170	0	170	165	5
2.64	.3325	.1675	.62761	.62311	450	0	450	428	22
2.88	.3400	.1600	.71748	.71009	739	0	739	697	43
3.12	.3475	.1525	.79610	.78630	980	0	980	918	61
3.36	.3550	.1450	.86060	.84935	1125	0	1125	1053	71
3.60	.3625	.1375	.91012	.89861	1151	0	1151	1082	69
3.84	.3700	.1300	.94559	.93494	1065	0	1065	1011	54
4.08	.3775	.1225	.96924	.96025	898	0	898	867	31
4.32	.3850	.1150	.98384	.97690	693	0	693	687	6
4.56	.3925	.1075	.99216	.98725	491	0	491	505	-13
4.80	.4000	.1000	.99651	.99331	320	0	320	345	-25

Tab. 22: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Tests von Fisher-Yates

$n_1 = 16$ $n_2 = 32$ $p = 0{,}25$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_1	Δ_{11}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}A_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}A_2(d)$	(8)-(9)
-.68	.2050	.2950	.00128	.00133	-4	-16	11	14	-2
-.45	.2200	.2800	.00269	.00273	-4	-19	15	18	-3
-.23	.2350	.2650	.00533	.00535	-2	-17	15	17	-2
0.00	.2500	.2500	.01000	.01000	0	0	0	0	0
.23	.2650	.2350	.01787	.01786	1	43	-43	-46	3
.45	.2800	.2200	.03047	.03048	-1	129	-130	-138	8
.68	.2950	.2050	.04971	.04973	-2	272	-274	-289	15
.91	.3100	.1900	.07774	.07762	12	484	-472	-498	26
1.13	.3250	.1750	.11676	.11605	71	764	-693	-737	43
1.36	.3400	.1600	.16861	.16635	226	1096	-870	-944	74
1.58	.3550	.1450	.23440	.22891	549	1446	-897	-1029	132
1.81	.3700	.1300	.31401	.30287	1113	1765	-651	-889	237
2.04	.3850	.1150	.40569	.38595	1974	2002	-28	-442	414
2.26	.4000	.1000	.50592	.47464	3128	2115	1013	333	680
2.49	.4150	.0850	.60951	.56461	4490	2082	2407	1381	1026
2.72	.4300	.0700	.71017	.65134	5883	1911	3972	2561	1410
2.94	.4450	.0550	.80143	.73079	7064	1632	5432	3684	1747
3.17	.4600	.0400	.87784	.79996	7787	1293	6494	4559	1935
3.39	.4750	.0250	.93603	.85719	7884	946	6938	5044	1894
3.62	.4900	.0100	.97544	.90217	7327	634	6693	5088	1605

Tab. 23: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Tests von Fisher-Yates

$n_1 = 64$ $n_2 = 128$ $p = 0{,}25$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_1	Δ_{11}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}A_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}A_2(d)$	(8)-(9)
-.68	.2275	.2725	.00128	.00133	-5	-8	3	3	0
-.45	.2350	.2650	.00267	.00273	-5	-10	4	4	0
-.23	.2425	.2575	.00530	.00535	-4	-8	4	4	0
0.00	.2500	.2500	.01000	.01000	0	0	0	0	0
.23	.2575	.2425	.01797	.01786	11	22	-11	-11	0
.45	.2650	.2350	.03079	.03048	31	64	-34	-35	1
.68	.2725	.2275	.05038	.04973	65	136	-71	-72	2
.91	.2800	.2200	.07882	.07762	120	242	-122	-124	2
1.13	.2875	.2125	.11807	.11605	202	382	-180	-184	4
1.36	.2950	.2050	.16953	.16635	319	548	-230	-236	6
1.58	.3025	.1975	.23368	.22891	477	723	-246	-257	11
1.81	.3100	.1900	.30966	.30287	678	882	-204	-222	18
2.04	.3175	.1825	.39514	.38595	919	1001	-82	-111	28
2.26	.3250	.1750	.48646	.47464	1182	1057	124	83	41
2.49	.3325	.1675	.57902	.56461	1441	1041	400	345	55
2.72	.3400	.1600	.66796	.65134	1662	955	707	640	66
2.94	.3475	.1525	.74889	.73079	1810	816	994	921	73
3.17	.3550	.1450	.81854	.79996	1858	647	1211	1140	71
3.39	.3625	.1375	.87513	.85719	1795	473	1321	1261	60
3.62	.3700	.1300	.91847	.90217	1630	317	1313	1272	41
3.85	.3775	.1225	.94969	.93578	1390	191	1199	1182	17
4.07	.3850	.1150	.97077	.95965	1112	101	1012	1020	-8
4.30	.3925	.1075	.98409	.97574	834	43	792	820	-28
4.53	.4000	.1000	.99192	.98607	586	10	576	617	-41

Tab. 24: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Tests von Fisher-Yates

$n_1 = 50$ $n_2 = 50$ $p = 0,1$ $\alpha = 0,01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_1	Δ_{11}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}A_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}A_2(d)$	(8)-(9)
-.75	.0775	.1225	.00126	.00105	21	0	21	14	7
-.50	.0850	.1150	.00263	.00235	28	0	28	21	7
-.25	.0925	.1075	.00525	.00499	26	0	26	21	5
.00	.1000	.1000	.01000	.01000	0	0	0	0	0
.25	.1075	.0925	.01818	.01893	-75	0	-75	-64	-11
.50	.1150	.0850	.03162	.03390	-228	0	-228	-195	-33
.75	.1225	.0775	.05267	.05747	-480	0	-480	-407	-74
1.00	.1300	.0700	.08412	.09236	-824	0	-824	-677	-147
1.25	.1375	.0625	.12892	.14089	-1197	0	-1197	-929	-266
1.50	.1450	.0550	.18971	.20430	-1460	0	-1460	-1028	-432
1.75	.1525	.0475	.26815	.28219	-1404	0	-1404	-809	-595
2.00	.1600	.0400	.36416	.37208	-792	0	-792	-133	-656
2.25	.1675	.0325	.47523	.46957	565	0	565	1036	-471
2.50	.1750	.0250	.59592	.56893	2699	0	2699	2587	111
2.75	.1825	.0175	.71805	.66409	5396	0	5396	4265	1131
3.00	.1900	.0100	.83148	.74973	8175	0	8175	5736	2439
3.25	.1975	.0025	.92570	.82217	10354	0	10354	6760	3593

Tab. 25: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Tests von Fisher-Yates

$n_1 = 200$ $n_2 = 200$ $p = 0{,}1$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_1	Δ_{11}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}A_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}A_2(d)$	(8)-(9)
-.75	.0888	.1113	.00109	.00105	4	0	4	4	0
-.50	.0925	.1075	.00241	.00235	5	0	5	5	0
-.25	.0963	.1038	.00505	.00499	5	0	5	5	0
.00	.1000	.1000	.01000	.01000	0	0	0	0	0
.25	.1038	.0963	.01877	.01893	-16	0	-16	-16	0
.50	.1075	.0925	.03340	.03390	-50	0	-50	-49	-1
.75	.1113	.0888	.05643	.05747	-104	0	-104	-102	-2
1.00	.1150	.0850	.09062	.09236	-174	0	-174	-169	-5
1.25	.1188	.0813	.13847	.14089	-241	0	-241	-232	-9
1.50	.1225	.0775	.20159	.20430	-271	0	-271	-257	-14
1.75	.1263	.0738	.27999	.28219	-220	0	-220	-202	-18
2.00	.1300	.0700	.37160	.37208	-48	0	-48	-33	-14
2.25	.1338	.0663	.47217	.46957	260	0	260	259	1
2.50	.1375	.0625	.57572	.56893	679	0	679	647	32
2.75	.1413	.0588	.67550	.66409	1141	0	1141	1066	75
3.00	.1450	.0550	.76525	.74973	1551	0	1551	1434	117
3.25	.1488	.0513	.84037	.82217	1821	0	1821	1675	146
3.50	.1525	.0475	.89866	.87973	1893	0	1893	1747	146
3.75	.1563	.0438	.94039	.92273	1767	0	1767	1650	117
4.00	.1600	.0400	.96779	.95290	1489	0	1489	1424	66
4.25	.1638	.0363	.98418	.97280	1138	0	1138	1130	8
4.50	.1675	.0325	.99303	.98513	789	0	789	827	-38
4.75	.1713	.0288	.99729	.99232	497	0	497	561	-64
5.00	.1750	.0250	.99909	.99625	284	0	284	353	-69

Tab. 26: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Tests von Fisher-Yates

$n_1 = 33$ $n_2 = 67$ $p = 0{,}1$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_1	Δ_{11}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}A_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}A_2(d)$	(8)-(9)
-.71	.0775	.1225	.00114	.00122	-7	-24	17	20	-3
-.47	.0850	.1150	.00251	.00258	-7	-31	24	26	-2
-.24	.0925	.1075	.00516	.00521	-5	-28	22	24	-1
.00	.1000	.1000	.01000	.01000	0	0	0	0	0
.24	.1075	.0925	.01835	.01825	10	75	-65	-65	0
.47	.1150	.0850	.03200	.03172	28	225	-197	-192	-5
.71	.1225	.0775	.05318	.05251	67	480	-413	-392	-20
.94	.1300	.0700	.08444	.08289	156	857	-701	-652	-48
1.18	.1375	.0625	.12839	.12490	348	1351	-1003	-913	-90
1.41	.1450	.0550	.18722	.17991	731	1928	-1197	-1065	-131
1.65	.1525	.0475	.26223	.24806	1417	2516	-1099	-962	-137
1.88	.1600	.0400	.35324	.32798	2526	3026	-501	-458	-42
2.12	.1675	.0325	.45810	.41668	4142	3366	776	532	245
2.35	.1750	.0250	.57252	.50986	6266	3468	2799	1980	819
2.59	.1825	.0175	.69018	.60250	8768	3312	5456	3721	1734
2.82	.1900	.0100	.80331	.68967	11364	2930	8433	5481	2953
3.06	.1975	.0025	.90374	.76732	13643	2396	11247	6942	4305

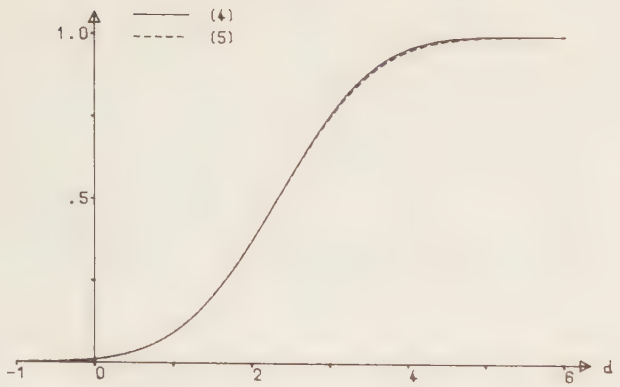
Tab. 27: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Tests von Fisher-Yates

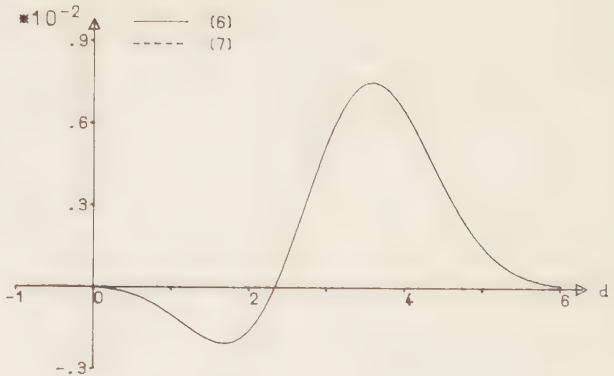
$n_1 = 132$ $n_2 = 268$ $p = 0{,}1$ $\alpha = 0{,}01$

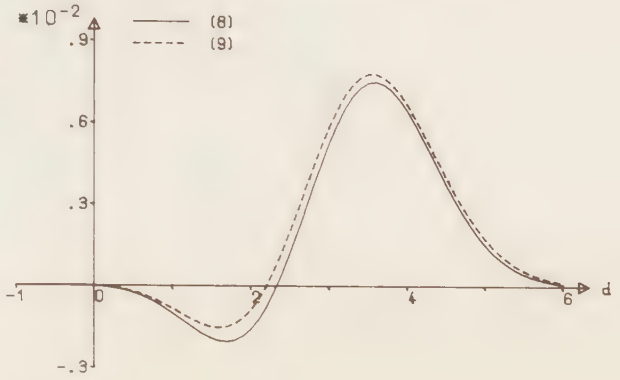
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_1	Δ_{11}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}A_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}A_2(d)$	(8)-(9)
-.71	.0888	.1113	.00114	.00122	-8	-12	4	5	-1
-.47	.0925	.1075	.00249	.00258	-10	-15	6	7	-1
-.24	.0963	.1038	.00513	.00521	-8	-14	5	6	-1
.00	.1000	.1000	.01000	.01000	0	0	0	0	0
.24	.1038	.0963	.01847	.01825	22	37	-15	-16	1
.47	.1075	.0925	.03238	.03172	67	113	-46	-48	2
.71	.1113	.0888	.05396	.05251	146	240	-94	-98	4
.94	.1150	.0850	.08561	.08289	272	428	-156	-163	7
1.18	.1188	.0813	.12950	.12490	460	676	-216	-228	13
1.41	.1225	.0775	.18711	.17991	720	964	-244	-266	23
1.65	.1263	.0738	.25863	.24806	1057	1258	-202	-240	39
1.88	.1300	.0700	.34258	.32798	1460	1513	-53	-115	62
2.12	.1338	.0663	.43574	.41668	1906	1683	223	133	91
2.35	.1375	.0625	.53336	.50986	2350	1734	616	495	121
2.59	.1413	.0588	.62985	.60250	2735	1656	1079	930	148
2.82	.1450	.0550	.71966	.68967	2999	1465	1534	1370	164
3.06	.1488	.0513	.79826	.76732	3094	1198	1896	1735	161
3.29	.1525	.0475	.86274	.83276	2998	901	2096	1960	136
3.53	.1563	.0438	.91220	.88498	2723	619	2103	2011	92
3.76	.1600	.0400	.94754	.92441	2313	383	1929	1893	36
4.00	.1638	.0363	.97093	.95259	1834	208	1626	1646	-20
4.23	.1675	.0325	.98520	.97165	1355	93	1262	1329	-67
4.47	.1713	.0288	.99315	.98385	930	27	903	999	-96
4.70	.1750	.0250	.99716	.99124	592	-4	596	701	-104

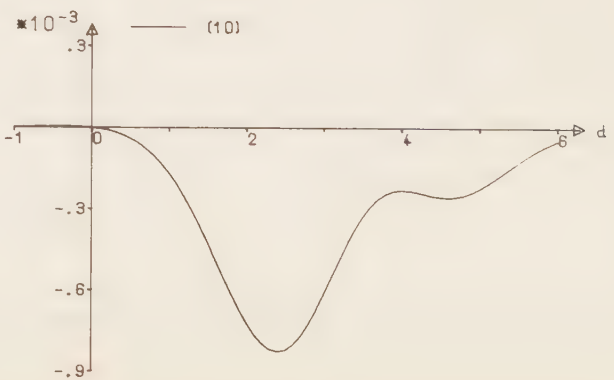
Figur 3: ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG DER GUETEFUNKTION DES TESTS VON FISHER-YATES

N_1 = 72 N_2 = 72 P = .50 ALPHA = .01



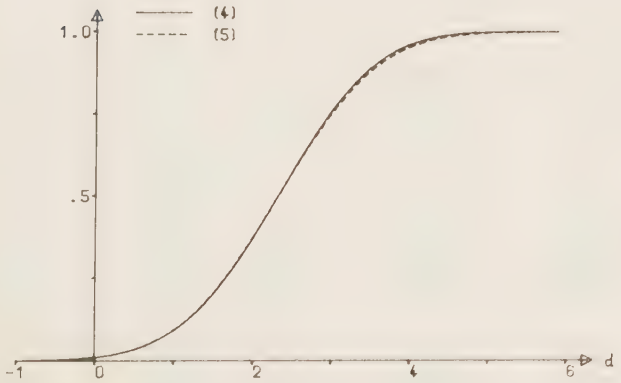


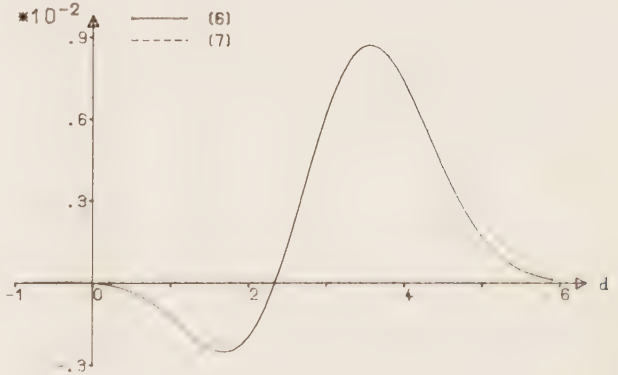


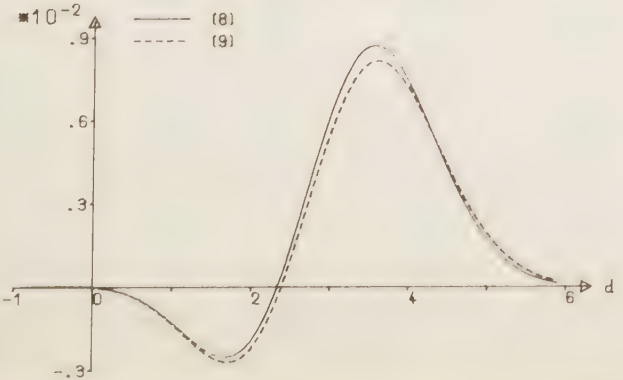


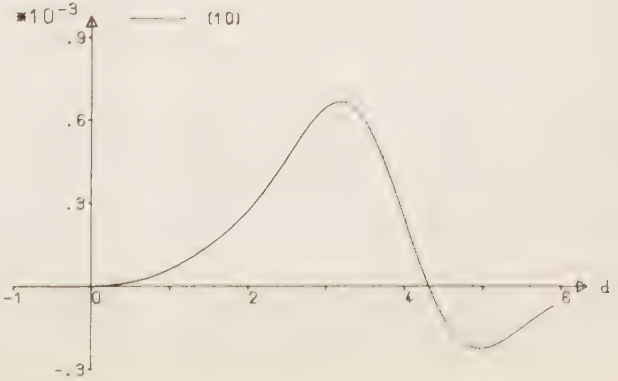
Figur 4: ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG DER GUETEFUNKTION DES TESTS VON FISHER-YATES

N_1 = 48 N_2 = 96 P = .50 ALPHA = .01



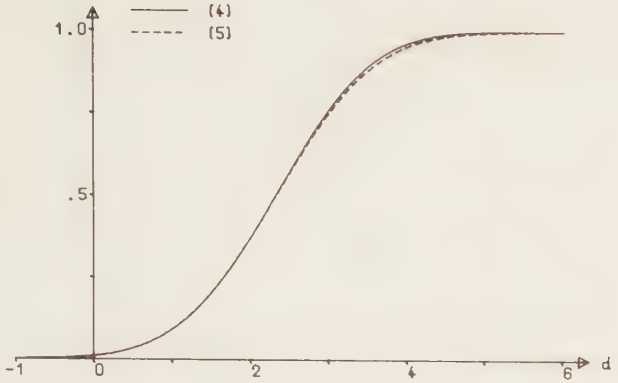


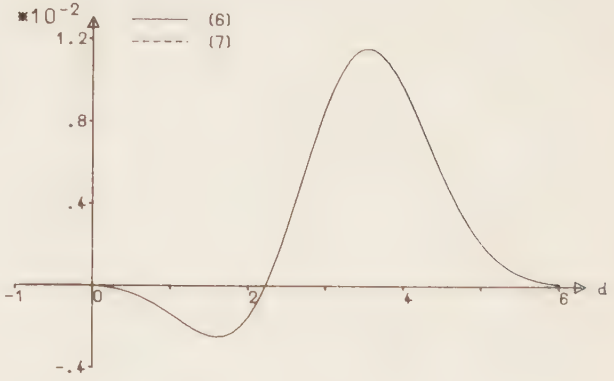


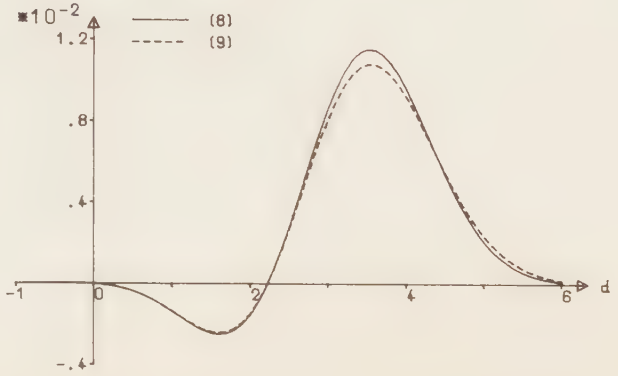


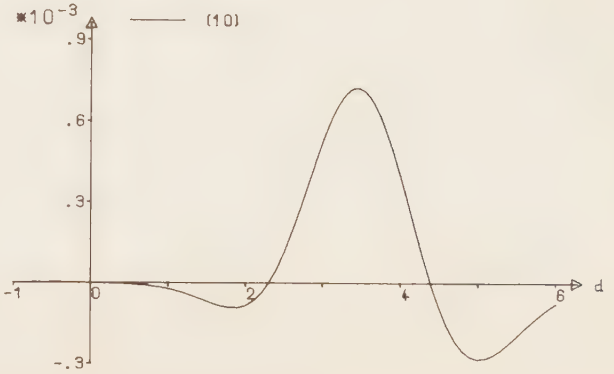
Figur 5: ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG DER GUETEFUNKTION DES TESTS VON FISHER-YATES

N_1 = 96 N_2 = 96 P = .25 ALPHA = .01



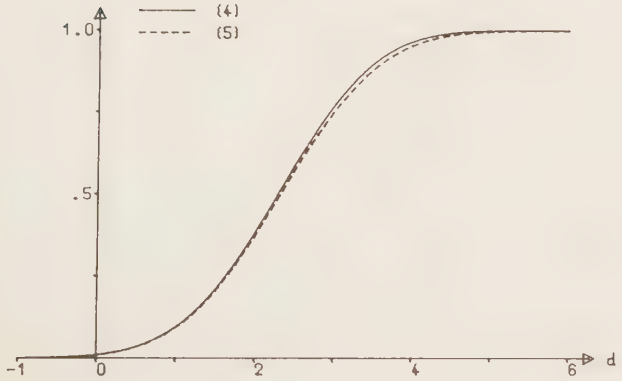


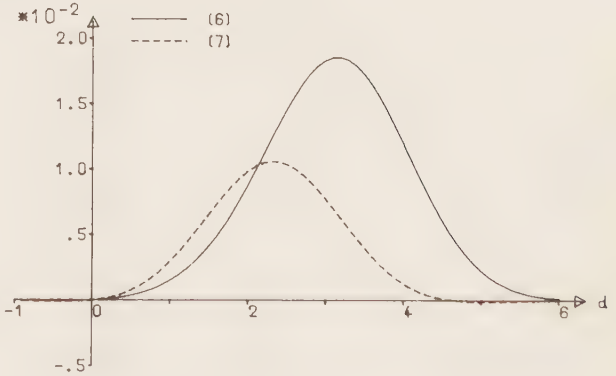


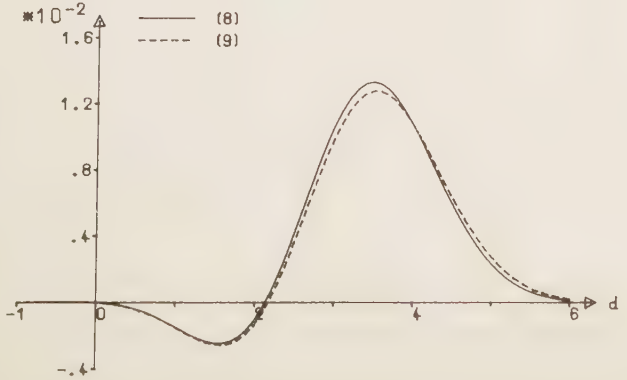


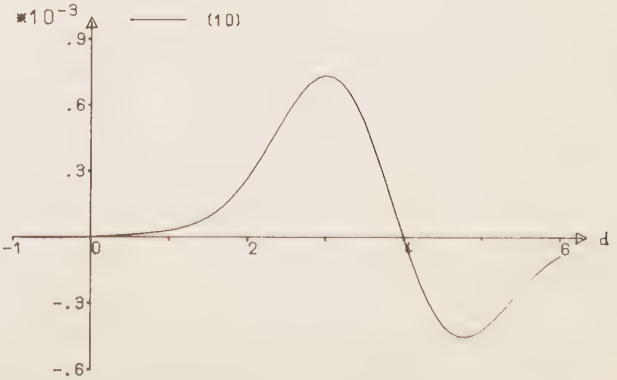
Figur 6: ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG DER GUETEFUNKTION DES TESTS VON FISHER-YATES

N_1 = 64 N_2 = 128 P = .25 ALPHA = .01



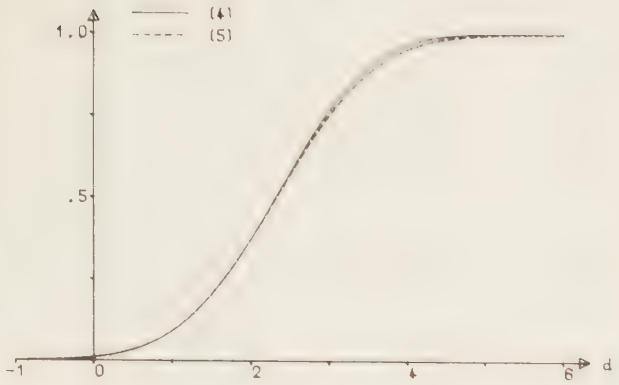


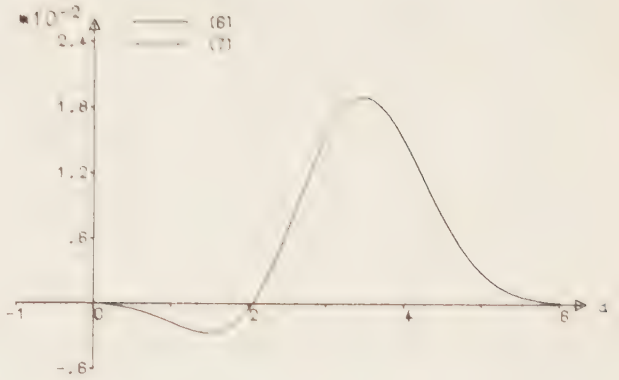


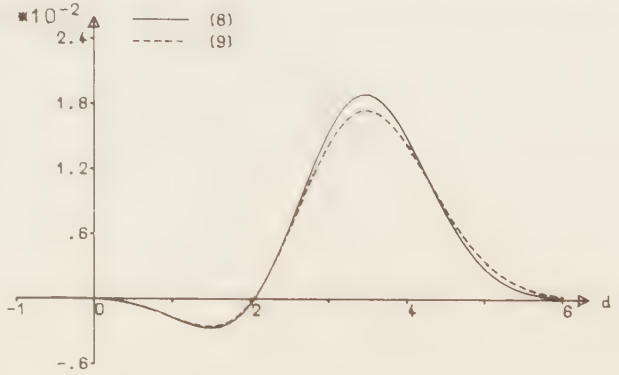


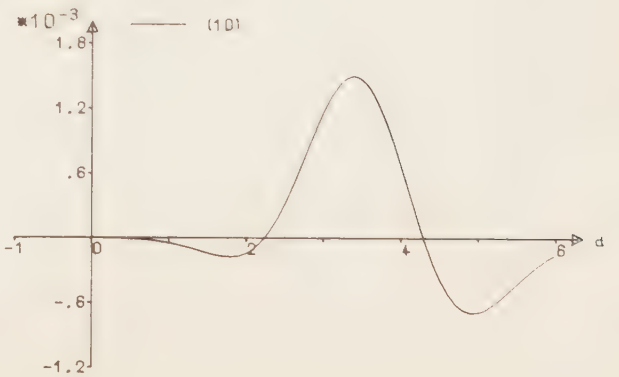
Figur 7: ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG DER GÜTEFUNKTION DES TESTS VON FISHER YATES

N_1 = 200 N_2 = 200 P = .10 ALPHA = .01



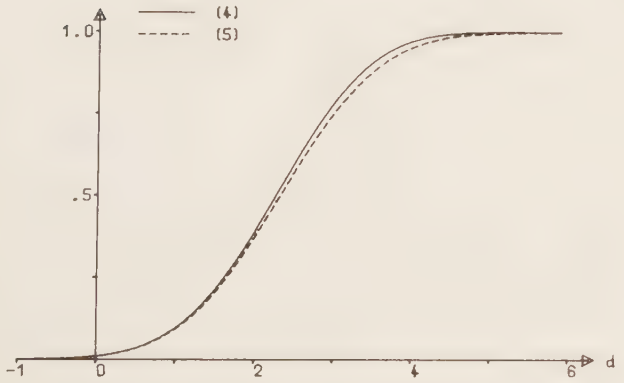


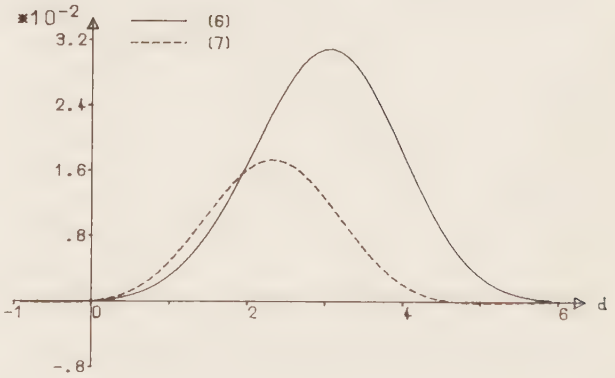


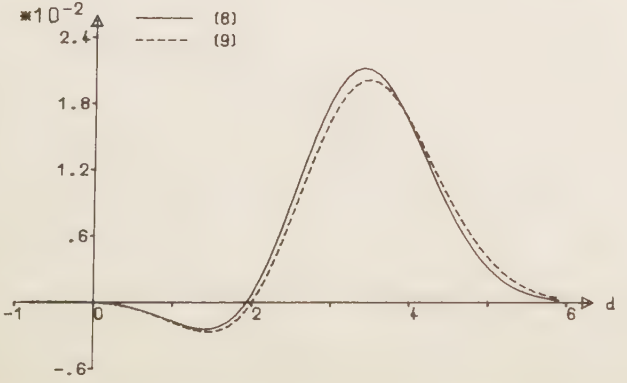


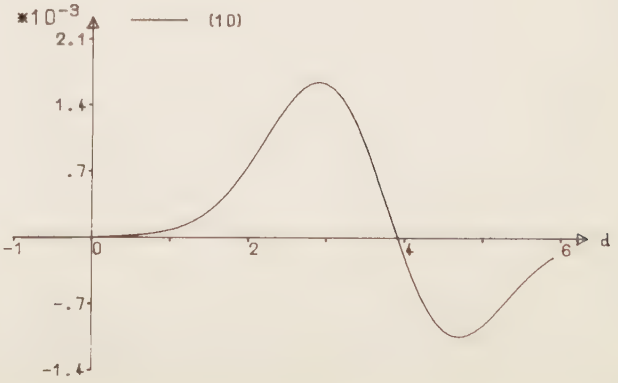
Figur 8: ASYMPTØTISCHE ENTWICKLUNG DER GUETEFUNKTIØN DES TESTS VØN FISHER-YATES

N_1 = 132 N_2 = 268 P = .10 ALPHA = .01









4. Asymptotische Entwicklungen der Gütefunktionen des Sigma-Differenz-Tests und des modifizierten Sigma-Differenz-Tests

4.1 Herleitung der Entwicklungen

X_1 und X_2 seien unabhängige binomialverteilte Zufallsgrößen mit den Parametern n_1,p_1 und n_2,p_2. Hypothese und Alternative über den unbekannten Parameter $(p_1,p_2) \in \Theta = \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0<y_1,y_2<1\}$ lauten

$$H_o: p_1 \leq p_2$$

$$H_1: p_1 > p_2.$$

Wir bezeichnen wieder mit α das Signifikanzniveau, mit Ω den Stichprobenraum und mit $z = z(1-\alpha)$ das $(1-\alpha)$-Quantil der Standardnormalverteilung; außerdem gelten die Abkürzungen (3.2) und (3.3).

In Abschnitt 2 haben wir gezeigt, daß

$$\Delta_1 = \Delta_1(1-\alpha,k,n_1,n) = k\,\frac{n_1}{n} + z\sqrt{\frac{n_1 n_2 k(n-k)}{n^3}}\,,$$

$k = k_1+k_2$, $(k_1,k_2) \in \Omega$, eine Näherung für die Variable $q^0 = q^0(1-\alpha,k,n_1,n)$ ist, die in der Testfunktion des Tests von Fisher-Yates vorkommt. Ersetzt man in (3.1) q^0 durch Δ_1, so erhält man die Testfunktion

$$\varphi_2(k_1,k_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k_1 \geq \Delta_1 + \frac{1}{2} \\ k_1 + \frac{1}{2} - \Delta_1 & \text{falls } |k_1 - \Delta_1| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{falls } k_1 \leq \Delta_1 - \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (k_1,k_2) \in \Omega$$

des Sigma-Differenz-Tests.

Satz 5:

Es sei $g_2(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha)$ die Gütefunktion des Sigma-Differenz-Tests. Existieren $\varepsilon_1,\varepsilon_2,J_1,J_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$0 < \varepsilon_1 \leq \alpha,p,\lambda \leq \varepsilon_2 < 1$$

$$0 < J_1 \leq \sigma(p_1-p_2) \leq J_2 \qquad p_1 > p_2,$$

dann gilt für $\sigma \to \infty$

$$(4.1) \qquad g_2(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha) =$$

$$= 1 - \Phi(z-d) + \frac{1}{\sigma} B_1(d) + \frac{1}{\sigma^2} B_2(d) + o(\sigma^{-2})$$

wobei

$$B_1(d) = \frac{\phi(z-d)}{12\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} (a_1 d^2 + a_2 d + b_1)$$

$$B_2(d) = \frac{\phi(z-d)}{576\lambda(1-\lambda)} (a_3 d^5 + a_4 d^4 + b_2 d^3 + b_3 d^2 + b_4 d + b_5)$$

$$b_1 = 2ab(z^2 - 1)$$

$$b_2 = -8a^2b^2z^2 - a^2b^2 + 9a^2 - 3b^2 + 9$$

$$b_3 = -16a^2b^2z^3 + 3a^2b^2z + 9a^2z + 15b^2z - 3z$$

$$b_4 = 8a^2b^2z^4 - 3a^2b^2z^2 - 3a^2b^2 - 9a^2z^2 + 15b^2z^2$$
$$-9a^2 - 15b^2 - 3z^2 + 27 + 576\, I_2$$

$$b_5 = 8a^2b^2z^5 - 35a^2b^2z^3 + 3a^2b^2z - 9a^2z^3 - 9b^2z^3$$
$$+ 9a^2z + 9b^2z - 3z^3 + 3z - 576z\, I_2$$

a_1, a_2, a_3, a_4 und a,b wie in Satz 4

$$I_2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sigma} \phi(s(k)) P_2(\nu_1 s(k) + \nu_3)$$

$s(k)$ und ν_1 wie in Satz 4

$$\nu_3 = n_1p_1 + n_2p_2 + \sigma z\sqrt{\lambda(1-\lambda)} - \frac{1}{4}abdz + \frac{1}{2}.$$

Ist zusätzlich λ konstant für $\sigma \to \infty$ und $\lambda = \frac{\kappa_1}{\kappa}$ mit $\kappa_1, \kappa \in \mathbb{N}$, κ_1, κ teilerfremd, so gilt die Entwicklung (4.1) mit

$$I_2 = \frac{1}{\kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \left(P_2(\rho_1 x + \rho_3) + \frac{1}{12}\right) dx - \frac{1}{12}$$

ρ_1 wie in Satz 4

$$\rho_3 = \kappa(\sigma z\sqrt{\lambda(1-\lambda)} - \frac{1}{4}abdz + \frac{1}{2}).$$

Beweis:

Der Beweis wird geführt wie der Beweis von Satz 4. Mit der dort gewählten Notation gilt

$$g_2(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha) =$$

$$= \sum_{s \in \Omega_1^S} P\{R^0 > \frac{\Delta_1(s)-\mu_1}{\sigma},\ s-\frac{1}{2\sigma} \le S^0 < s+\frac{1}{2\sigma}\},$$

wobei $\Delta_1(s) = \Delta_1(1-\alpha, s\sigma+\mu_1+\mu_2, n_1, n)$.

Die Teile 1 - 3 und 6 des Beweises von Satz 4 gelten unverändert. In Teil 4 hat man nun die asymptotischen Entwicklungen von

$$t_{11}(s) = \frac{\Delta_1(s)-\mu_1}{\sigma}$$

und

$$t_{12}(s) = \frac{t_{11}(s)(g+h)-sg}{\sqrt{(g+h)gh}}$$

herzuleiten. Man erhält für $\sigma \to \infty$

$$t_{11}(s) = s\delta_{11}+\delta_{12} + \frac{1}{\sigma}(s\delta_{13}+\delta_{14}) + o(\sigma^{-1})$$

$$t_{12}(s) = z-d + \frac{1}{\sigma}(s\delta_{15}+\delta_{16})$$

$$+ \frac{1}{\sigma^2}(s^2\delta_{17}+s\delta_{18}+\delta_{19})$$

$$+ o(\sigma^{-2});$$

dabei sind die δ_{11} bis δ_{19} Polynome in d, deren Koeffizienten von λ, p und z abhängen. Sie werden im Anhang in Tabelle V aufgeführt.

Die restlichen Teile des Beweises sind dann analog zum Beweis von Satz 4 zu führen.

In Abschnitt 2 wurde gezeigt, daß

$$\Delta_2 = \Delta_2(1-\alpha,k,n_1,n) = \Delta_1 + \frac{1}{6}(z^2-1)(1-2\frac{k}{n})(1-2\frac{n_1}{n}),$$

$k = k_1+k_2$, $(k_1,k_2) \in \Omega$, für q^0 eine bessere Näherung als Δ_1 ist. Ersetzt man in (3.1) q^0 durch Δ_2, so erhält man die Testfunktion

$$\psi_3(k_1,k_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k_1 \geq \Delta_2 + \frac{1}{2} \\ k_1+\frac{1}{2}-\Delta_2 & \text{falls } |k_1-\Delta_2| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{falls } k_1 \leq \Delta_2 - \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (k_1,k_2) \in \Omega$$

des modifizierten Sigma-Differenz-Tests.

Satz 6:

Es sei $g_3(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha)$ die Gütefunktion des modifizierten Sigma-Differenz-Tests. Existieren $\varepsilon_1,\varepsilon_2,J_1,J_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$0 < \varepsilon_1 \leq \alpha,p,\lambda \leq \varepsilon_2 < 1$$

$$0 < J_1 \leq \sigma(p_1-p_2) \leq J_2 \qquad p_1 > p_2,$$

dann gilt für $\sigma \to \infty$

(4.2) $$g_3(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha) =$$

$$= 1 - \Phi(z-d) + \frac{1}{\sigma} C_1(d) + \frac{1}{\sigma^2} C_2(d) + o(\sigma^{-2})$$

wobei

$$C_1(d) = \frac{\phi(z-d)}{12\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} (a_1 d^2 + a_2 d)$$

$$C_2(d) = \frac{\phi(z-d)}{576\lambda(1-\lambda)} (a_3 d^5 + a_4 d^4 + a_5 d^3 + a_6 d^2 + a_7 d + c_1)$$

$$c_1 = 13a^2b^2z^3 - 37a^2b^2z - 9a^2z^3 - 9b^2z^3 + 9a^2z$$

$$+ 9b^2z - 3z^3 + 3z - 576z\, I_1$$

$a_1 - a_7$, a, b und I_1 wie in Satz 4.

Ist zusätzlich λ konstant für $\sigma \to \infty$ und $\lambda = \frac{\kappa_1}{\kappa}$ mit $\kappa_1, \kappa \in \mathbb{N}$, κ_1, κ teilerfremd, so gilt die Entwicklung (4.2) mit I_1 wie in (3.5).

Beweis:

Die Anmerkungen zum Beweis von Satz 5 sind auf diesen Fall zu übertragen. Es gilt

$$g_3(n_1,n_2,p_1,p_2,\alpha) =$$

$$= \sum_{s \in \Omega_1^S} P\{R^0 > \frac{\Delta_2(s)-\mu_1}{\sigma},\ s - \frac{1}{2\sigma} \le S^0 < s + \frac{1}{2\sigma}\}$$

mit $\Delta_2(s) = \Delta_2(1-\alpha, s\sigma+\mu_1+\mu_2, n_1, n)$. Für

$$t_{21}(s) = \frac{\Delta_2(s)-\mu_1}{\sigma}$$

sowie

$$t_{22}(s) = \frac{t_{21}(s)(g+h)-sg}{\sqrt{(g+h)gh}}$$

findet man die folgenden asymptotischen Entwicklungen für $\sigma \to \infty$:

$$t_{21}(s) = s\delta_{21}+\delta_{22} + \frac{1}{\sigma}(s\delta_{23}+\delta_{24}) + o(\sigma^{-1})$$

$$t_{22}(s) = z-d + \frac{1}{\sigma}(s\delta_{25}+\delta_{26}) + \frac{1}{\sigma^2}(s^2\delta_{27}+s\delta_{28}+\delta_{29}) + o(\sigma^{-2});$$

dabei sind die $\delta_{21} - \delta_{29}$ Polynome in d, deren Koeffizienten von λ, p und z abhängen. Sie werden im Anhang in Tabelle VI aufgeführt.

4.2 Anwendungen

Aus der Entwicklung (4.1) erhält man für die Gütefunktion g_2 des Sigma-Differenz-Tests die drei Näherungen

$$\Delta_{21} = 1 - \Phi(z-d)$$

$$\Delta_{22} = 1 - \Phi(z-d) + \frac{1}{\sigma} B_1(d)$$

$$\Delta_{23} = 1 - \Phi(z-d) + \frac{1}{\sigma} B_1(d) + \frac{1}{\sigma^2} B_2(d),$$

aus (4.2) für die Gütefunktion g_3 des modifizierten Sigma-Differenz-Tests die drei Näherungen

$$\Delta_{31} = 1 - \Phi(z-d)$$

$$\Delta_{32} = 1 - \Phi(z-d) + \frac{1}{\sigma} C_1(d)$$

$$\Delta_{33} = 1 - \Phi(z-d) + \frac{1}{\sigma} C_1(d) + \frac{1}{\sigma^2} C_2(d).$$

B_1, B_2, C_1 und C_2 sind definiert wie in Satz 5 und Satz 6.

Die Tabellen 28 - 45 geben einen Einblick in das Verhalten dieser Näherungen. Beim Sigma-Differenz-Test sind alle Parameterkonstellationen aus Tabelle 15 erfaßt, beim modifizierten Sigma-Differenz-Test nur diejenigen aus Tabelle 15 mit $n_1 \neq n_2$; für $n_1 = n_2$ sind beide Tests identisch und damit auch die Gütefunktionen und alle Näherungen. Der Aufbau der Tabellen entspricht dem der Tabellen 16 - 27. Die Werte der Spalten 4 - 10 aus den Tabellen 28 - 45 mit $\sigma=6$ sind in den Figuren 9 - 17 als Funktion von d gezeichnet.

Ein Vergleich zeigt, daß die Entwicklungen von g_1 und g_3 bis zu einem Restglied der Ordnung $o(\sigma^{-1})$ übereinstimmen, die Entwicklungen von g_1 und g_2 nur bis zu einem Restglied der Ordnung $o(1)$. Der modifizierte Sigma-Differenz-Test liegt also "näher" beim Test von Fisher-Yates als der Sigma-Differenz-Test.

Der Test von Fisher-Yates ist ein Niveau-α-Test. Im folgenden soll kurz diskutiert werden, ob die beiden anderen Tests ebenfalls das Signifikanzniveau einhalten. Wir betrachten dazu die Gütefunktionen g_2 und g_3 für $p_1 = p_2 = p$. Aus (4.1) und (4.2) folgt für $\sigma \to \infty$

$$g_2(n_1,n_2,p,p,\alpha) =$$

$$= \alpha + \frac{1}{\sigma} \frac{\phi(z)}{6\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}(z^2-1)(1-2p)(1-2\lambda)$$

$$+ \frac{1}{\sigma^2} \frac{\phi(z)}{576\lambda(1-\lambda)} b_5 + o(\sigma^{-2})$$

und

$$g_3(n_1,n_2,p,p,\alpha) =$$

$$= \alpha + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\phi(z)}{576\lambda(1-\lambda)} c_1 + o(\sigma^{-2})$$

mit b_5 und c_1 wie in Satz 5 und Satz 6. Beide Tests können das Signifikanzniveau überschreiten[1]. Der modifizierte Sigma-Differenz-Test hält das Signifikanzniveau ein bis zu einem Restglied der Ordnung $o(\sigma^{-1})$, der Sigma-Differenz-Test nur bis zu einem Restglied der Ordnung $o(1)$. Die asymptotischen Ergebnisse lassen erwarten, daß der Sigma-Differenz-Test das Signi-

---

1) z.B. gilt für $p = \lambda = 0{,}5$ und $\alpha = 0{,}01$: $c_1 \geq 52$

fikanzniveau stärker übersteigt als der modifizierte Sigma-Differenz-Test.

Erkenntnisse, in welchen Situationen der Sigma-Differenz-Test das Signifikanzniveau nicht einhält, lassen sich aus dem einfachen Term $\frac{1}{\sigma}\frac{\phi(z)}{6\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}(z^2-1)(1-2p)(1-2\lambda)$ gewinnen. Das Signifikanzniveau wird überschritten für $\alpha < 0{,}1587$ $(z>1)$ und für $p < 0{,}5$ und $\lambda < 0{,}5$ $(n_1<n_2)$ oder $p > 0{,}5$ und $\lambda > 0{,}5$ $(n_1>n_2)$, und zwar bei festem σ um so stärker, je näher α bei 0,0416[1] und p und λ bei 0 oder 1 liegen.

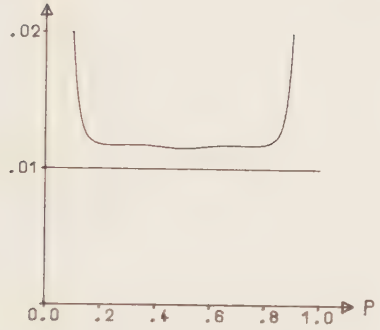
Alle asymptotischen Überlegungen finden sich in den Tabellen 28 - 45 bestätigt. Beim modifizierten Sigma-Differenz-Test sind die Differenzen $g_2(n_1,n_2,p,p,\alpha) - \alpha$ geringer. Sie betragen maximal 0,00179 für $\sigma = 3$ (Tabelle 40) und 0,00041 für $\sigma = 6$ (Tabelle 41). Beim Sigma-Differenz-Test lauten die entsprechenden Werte 0,00469 für $\sigma = 3$ (Tabelle 38) und 0,00207 für $\sigma = 6$ (Tabelle 39); sie finden sich in den Tabellen mit den kleinsten Werten für p und λ.

In den Figuren 18 und 19 sind $g_2(n_1,n_2,p,p,\alpha)$ und $g_3(n_1,n_2,p,p,\alpha)$ als Funktion von p dargestellt; n_1, n_2 und α sind wie in den Tabellen 28 - 45 gewählt. In Figur 19 zeigt sich deutlich die Überlegenheit des modifizierten Sigma-Differenz-Tests. Es gilt $\lim_{p\to 0} g_2(n_1,n_2,p,p,\alpha) = \lim_{p\to 1} g_2(n_1,n_2,p,p,\alpha) = 0{,}5$ wegen $\psi_2(0,0) = \psi_2(n_1,n_2) = 0{,}5$ und $\lim_{p\to 0} P\{(X_1,X_2) = (0,0)\} = \lim_{p\to 1} P\{(X_1,X_2) = (n_1,n_2)\} = 1$; mit analoger Begründung gilt in

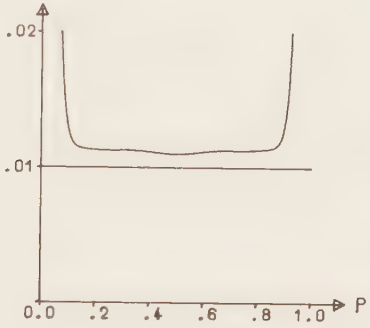
---

1) für $\alpha = 0{,}0416$, d.h. $z = \sqrt{3}$, ist $\phi(z)(z^2-1)$ maximal

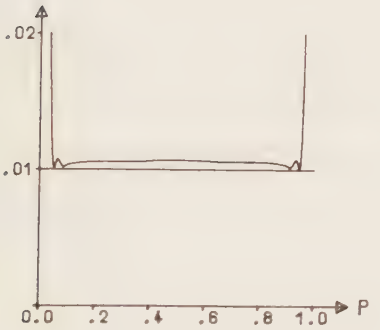
Figure 16: —— SIGMA-DIFFERENZ-TEST



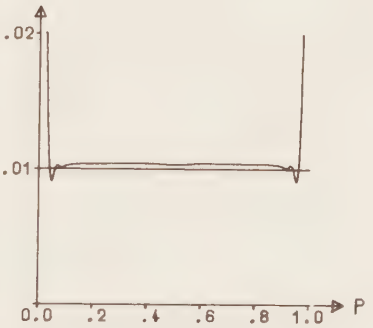
N_1= 18 N_2= 18 ALPHA=.01



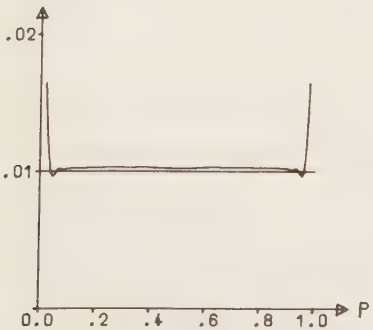
N_1= 24 N_2= 24 ALPHA=.01



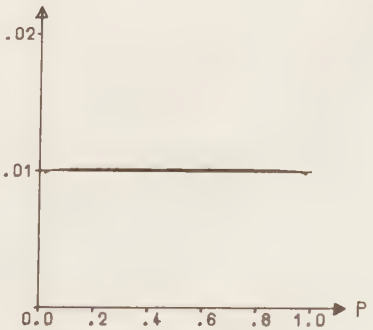
N_1= 50 N_2= 50 ALPHA=.01



N_1= 72 N_2= 72 ALPHA=.01



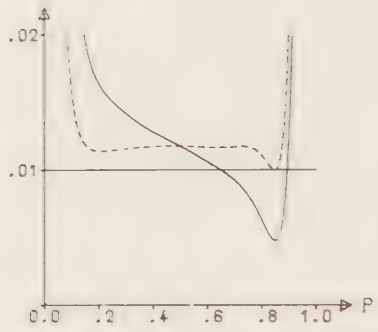
N_1= 96 N_2= 96 ALPHA=.01



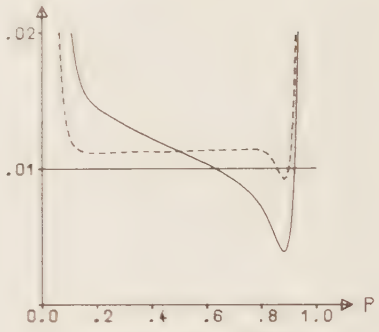
N_1=200 N_2=200 ALPHA=.01

Figure 10:

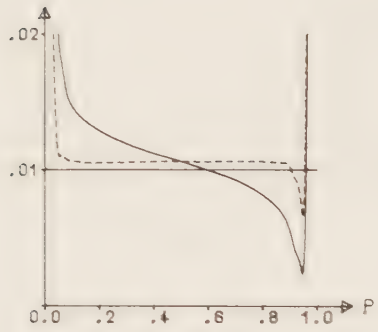
——— SIGMA-DIFFERENZ-TEST
------ MOD. SIGMA-DIFFERENZ-TEST



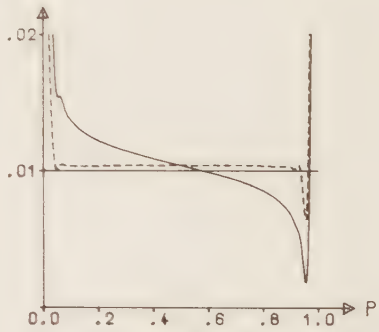
N_1= 12 N_2= 24 ALPHA=.01



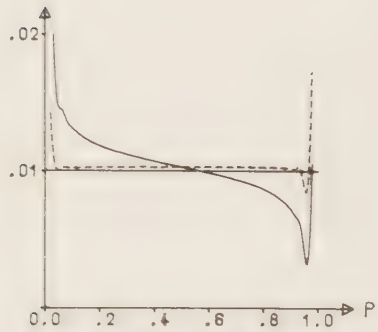
N_1= 16 N_2= 32 ALPHA=.01



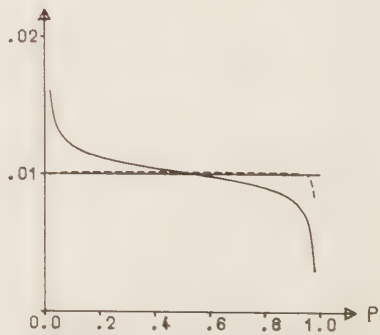
N_1= 33 N_2= 67 ALPHA=.01



N_1= 48 N_2= 96 ALPHA=.01



N_1= 64 N_2=128 ALPHA=.01



N_1=132 N_2=268 ALPHA=.01

Figur 19 außerdem $\lim_{p\to 0} g_3(n_1,n_2,p,p,\alpha) = 0{,}2500$ und

$\lim_{p\to 1} g_3(n_1,n_2,p,p,\alpha) = 0{,}7500$ für $\lambda = 0{,}33$ sowie

$\lim_{p\to 0} g_3(n_1,n_2,p,p,\alpha) = 0{,}2549$ und $\lim_{p\to 1} g_3(n_1,n_2,p,p,\alpha) = 0{,}7451$

für $\lambda = 0{,}3333$.

g_2 und g_3 sind stetig in $(p_1,p_2) \in \Theta$ und für $p_1 = p_2$ nicht konstant. Der Sigma-Differenz-Test und der modifizierte Sigma-Differenz-Test sind also verfälscht.

Beide Tests können größere Macht als der Test von Fisher-Yates besitzen, da dieser nur der gleichmäßig mächtigste unter allen unverfälschten Tests zum Niveau α ist. Ein Vergleich der Tabellen 16 - 27 mit den Tabellen 28 - 45 bestätigt dies. Die Differenzen der Gütefunktionen werden in den asymptotischen Entwicklungen hauptsächlich durch die Terme $\frac{\phi(z-d)}{\sigma 12\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}\, b_1$ und $\frac{\phi(z-d)}{\sigma^2 576\lambda(1-\lambda)}\, c_1$ beschrieben. Diese sind auch die entscheidenden Terme bei der Berechnung der asymptotischen Defizienzen.

Tab. 28: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Sigma-Differenz-Tests

$n_1 = 18$ $n_2 = 18$ $p = 0{,}5$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_2	Δ_{21}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}B_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}B_2(d)$	(8)-(9)
-.60	.4500	.5500	.00212	.00171	40	0	40	29	11
-.30	.4750	.5250	.00515	.00432	84	0	84	62	22
0.00	.5000	.5000	.01152	.01000	152	0	152	116	36
.30	.5250	.4750	.02380	.02136	243	0	243	190	54
.60	.5500	.4500	.04560	.04214	346	0	346	276	70
.90	.5750	.4250	.08137	.07688	448	0	448	370	78
1.20	.6000	.4000	.13557	.13001	556	0	556	487	69
1.50	.6250	.3750	.21146	.20430	716	0	716	678	38
1.80	.6500	.3500	.30948	.29932	1015	0	1015	1023	-8
2.10	.6750	.3250	.42589	.41047	1542	0	1542	1586	-44
2.40	.7000	.3000	.55246	.52936	2310	0	2310	2348	-39
2.70	.7250	.2750	.67757	.64567	3190	0	3190	3173	17
3.00	.7500	.2500	.78898	.74973	3925	0	3925	3838	86
3.30	.7750	.2250	.87718	.83489	4230	0	4230	4133	97
3.60	.8000	.2000	.93817	.89861	3956	0	3956	3963	-6
3.90	.8250	.1750	.97407	.94222	3185	0	3185	3391	-205
4.20	.8500	.1500	.99142	.96951	2191	0	2191	2596	-405
4.50	.8750	.1250	.99794	.98513	1281	0	1281	1783	-502
4.80	.9000	.1000	.99969	.99331	638	0	638	1101	-464
5.10	.9250	.0750	.99998	.99723	275	0	275	613	-338
5.40	.9500	.0500	1.00000	.99894	106	0	106	308	-202

Tab. 29: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Sigma-Differenz-Tests

$n_1 = 72$ $n_2 = 72$ $p = 0{,}5$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_2	δ_{21}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}B_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}B_2(d)$	(8)-(9)
-.60	.4750	.5250	.00180	.00171	9	0	9	8	1
-.30	.4875	.5125	.00450	.00432	19	0	19	16	2
0.00	.5000	.5000	.01035	.01000	35	0	35	31	4
.30	.5125	.4875	.02193	.02136	57	0	57	50	7
.60	.5250	.4750	.04297	.04214	83	0	83	73	9
.90	.5375	.4625	.07798	.07688	109	0	109	98	11
1.20	.5500	.4500	.13141	.13001	140	0	140	128	11
1.50	.5625	.4375	.20615	.20430	185	0	185	176	9
1.80	.5750	.4250	.30198	.29932	265	0	265	261	5
2.10	.5875	.4125	.41445	.41047	398	0	398	399	-1
2.40	.6000	.4000	.53518	.52936	582	0	582	586	-4
2.70	.6125	.3875	.65352	.64567	785	0	785	790	-5
3.00	.6250	.3750	.75924	.74973	951	0	951	954	-3
3.30	.6375	.3625	.84512	.83489	1024	0	1024	1027	-3
3.60	.6500	.3500	.90838	.89861	977	0	977	984	-7
3.90	.6625	.3375	.95049	.94222	827	0	827	843	-15
4.20	.6750	.3250	.97572	.96951	621	0	621	645	-24
4.50	.6875	.3125	.98928	.98513	414	0	414	444	-29
4.80	.7000	.3000	.99576	.99331	245	0	245	274	-29
5.10	.7125	.2875	.99852	.99723	129	0	129	153	-24
5.40	.7250	.2750	.99954	.99894	60	0	60	77	-17

Tab. 30: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Sigma-Differenz-Tests

$n_1 = 12$ $n_2 = 24$ $p = 0{,}5$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_2	Δ_{21}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}B_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}B_2(d)$	(8)-(9)
-.57	.4500	.5500	.00242	.00191	50	0	50	48	2
-.28	.4750	.5250	.00554	.00454	100	0	100	97	3
0.00	.5000	.5000	.01178	.01000	178	0	178	175	3
.28	.5250	.4750	.02336	.02050	286	0	286	285	1
.57	.5500	.4500	.04337	.03915	422	0	422	426	-5
.85	.5750	.4250	.07556	.06973	583	0	583	598	-15
1.13	.6000	.4000	.12386	.11605	781	0	781	813	-32
1.41	.6250	.3750	.19142	.18085	1057	0	1057	1110	-54
1.70	.6500	.3500	.27938	.26458	1480	0	1480	1553	-73
1.98	.6750	.3250	.38572	.36450	2122	0	2122	2194	-73
2.26	.7000	.3000	.50459	.47464	2995	0	2995	3029	-35
2.55	.7250	.2750	.62675	.58677	3998	0	3998	3953	45
2.83	.7500	.2500	.74123	.69219	4904	0	4904	4772	131
3.11	.7750	.2250	.83797	.78375	5422	0	5422	5267	155
3.39	.8000	.2000	.91056	.85719	5337	0	5337	5288	49
3.68	.8250	.1750	.95788	.91159	4629	0	4629	4824	-195
3.96	.8500	.1500	.98385	.94881	3504	0	3504	3998	-494
4.24	.8750	.1250	.99531	.97234	2297	0	2297	3013	-716
4.53	.9000	.1000	.99908	.98607	1302	0	1302	2068	-767
4.81	.9250	.0750	.99990	.99347	644	0	644	1294	-651
5.09	.9500	.0500	1.00000	.99715	284	0	284	739	-455
5.37	.9750	.0250	1.00000	.99885	115	0	115	386	-271

Tab. 31: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Sigma-Differenz-Tests

$n_1 = 48$ $n_2 = 96$ $p = 0{,}5$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_2	Δ_{21}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}B_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}B_2(d)$	(8)-(9)
-.57	.4750	.5250	.00203	.00191	11	0	11	11	0
-.28	.4875	.5125	.00476	.00454	22	0	22	23	-1
0.00	.5000	.5000	.01041	.01000	41	0	41	42	-1
.28	.5125	.4875	.02116	.02050	66	0	66	68	-2
.57	.5250	.4750	.04013	.03915	98	0	98	101	-3
.85	.5375	.4625	.07111	.06973	138	0	138	143	-4
1.13	.5500	.4500	.11794	.11605	189	0	189	195	-6
1.41	.5625	.4375	.18347	.18085	262	0	262	269	-7
1.70	.5750	.4250	.26831	.26458	373	0	373	381	-7
1.98	.5875	.4125	.36988	.36450	538	0	538	544	-6
2.26	.6000	.4000	.48219	.47464	755	0	755	756	-2
2.55	.6125	.3875	.59673	.58677	996	0	996	991	5
2.83	.6250	.3750	.70430	.69219	1211	0	1211	1199	11
3.11	.6375	.3625	.79713	.78375	1338	0	1338	1325	13
3.39	.6500	.3500	.87057	.85719	1338	0	1338	1331	8
3.68	.6625	.3375	.92367	.91159	1208	0	1208	1214	-6
3.96	.6750	.3250	.95864	.94881	983	0	983	1006	-22
4.24	.6875	.3125	.97954	.97234	721	0	721	758	-37
4.53	.7000	.3000	.99082	.98607	476	0	476	520	-44
4.81	.7125	.2875	.99630	.99347	283	0	283	325	-42
5.09	.7250	.2750	.99866	.99715	151	0	151	186	-35
5.37	.7375	.2625	.99957	.99885	73	0	73	97	-24

Tab. 32: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Sigma-Differenz-Tests

$n_1 = 24$ $n_2 = 24$ $p = 0{,}25$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
δ	p_1	p_2	g_2	γ_{21}	(4)-(5)	$n^{-1}B_1(\delta)$	(6)+(7)	$n^{-2}B_2(\delta)$	(8)+(9)
-.72	.2050	.2950	.00147	.00116	31	0	31	27	5
-.48	.2200	.2800	.00306	.00251	55	0	55	49	7
-.24	.2350	.2650	.00602	.00514	88	0	88	80	8
0.00	.2500	.2500	.01127	.01000	127	0	127	119	4
.24	.2650	.2350	.02013	.01847	165	0	165	159	7
.48	.2800	.2200	.03433	.03242	191	0	191	189	2
.72	.2950	.2050	.05604	.05410	194	0	194	202	-8
.96	.3100	.1900	.08765	.08591	174	0	174	200	-26
1.20	.3250	.1750	.13152	.13001	151	0	151	207	-57
1.44	.3400	.1600	.18951	.18772	179	0	179	278	-98
1.68	.3550	.1450	.26247	.25903	345	0	345	485	-140
1.92	.3700	.1300	.34969	.34224	744	0	744	901	-157
2.16	.3850	.1150	.44848	.43394	1453	0	1453	1561	-108
2.40	.4000	.1000	.55415	.52936	2479	0	2479	2433	46
2.64	.4150	.0850	.66033	.62311	3722	0	3722	3406	316
2.88	.4300	.0700	.75984	.71009	4974	0	4974	4312	663
3.12	.4450	.0550	.84588	.78630	5957	0	5957	4972	986
3.36	.4600	.0400	.91340	.84935	6405	0	6405	5255	1150
3.60	.4750	.0250	.96023	.89861	6162	0	6162	5117	1045
3.84	.4900	.0100	.98754	.93494	5260	0	5260	4608	651

Tab. 33: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Sigma-Differenz-Tests

$n_1 = 96$ $n_2 = 96$ $p = 0{,}25$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_2	Δ_{21}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}B_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}B_2(d)$	(8)-(9)
-.72	.2275	.2725	.00123	.00116	7	0	7	7	0
-.48	.2350	.2650	.00263	.00251	13	0	13	12	0
-.24	.2425	.2575	.00534	.00514	21	0	21	20	1
0.00	.2500	.2500	.01030	.01000	30	0	30	30	1
.24	.2575	.2425	.01888	.01847	40	0	40	40	1
.48	.2650	.2350	.03290	.03242	48	0	48	47	1
.72	.2725	.2275	.05461	.05410	51	0	51	51	0
.96	.2800	.2200	.08641	.08591	49	0	49	50	-1
1.20	.2875	.2125	.13050	.13001	50	0	50	52	-2
1.44	.2950	.2050	.18836	.18772	65	0	65	69	-5
1.68	.3025	.1975	.26017	.25903	114	0	114	121	-7
1.92	.3100	.1900	.34442	.34224	218	0	218	225	-7
2.16	.3175	.1825	.43780	.43394	386	0	386	390	-5
2.40	.3250	.1750	.53547	.52936	612	0	612	608	3
2.64	.3325	.1675	.63179	.62311	868	0	868	852	16
2.88	.3400	.1600	.72119	.71009	1110	0	1110	1078	32
3.12	.3475	.1525	.79918	.78630	1288	0	1288	1243	45
3.36	.3550	.1450	.86299	.84935	1364	0	1364	1314	50
3.60	.3625	.1375	.91185	.89861	1324	0	1324	1279	45
3.84	.3700	.1300	.94676	.93494	1181	0	1181	1152	29
4.08	.3775	.1225	.96996	.96025	971	0	971	963	8
4.32	.3850	.1150	.98425	.97690	735	0	735	748	-13
4.56	.3925	.1075	.99238	.98725	513	0	513	542	-28
4.80	.4000	.1000	.99662	.99331	330	0	330	366	-36

Tab. 34: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Sigma-Differenz-Tests

$n_1 = 16$ $n_2 = 32$ $p = 0{,}25$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_2	Δ_{21}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}B_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}B_2(d)$	(8)-(9)
-.68	.2050	.2950	.00191	.00133	58	22	36	27	9
-.45	.2200	.2800	.00391	.00273	118	54	65	48	16
-.23	.2350	.2650	.00756	.00535	221	116	105	79	26
0.00	.2500	.2500	.01386	.01000	386	231	155	117	38
.23	.2650	.2350	.02421	.01786	634	424	210	160	50
.45	.2800	.2200	.04035	.03048	987	726	261	201	60
.68	.2950	.2050	.06436	.04973	1464	1162	302	234	68
.91	.3100	.1900	.09843	.07762	2081	1743	338	263	75
1.13	.3250	.1750	.14457	.11605	2853	2457	395	306	89
1.36	.3400	.1600	.20421	.16635	3786	3259	527	405	122
1.58	.3550	.1450	.27774	.22891	4883	4070	813	623	190
1.81	.3700	.1300	.36412	.30287	6125	4791	1334	1025	309
2.04	.3850	.1150	.46062	.38595	7466	5316	2150	1659	491
2.26	.4000	.1000	.56280	.47464	8816	5565	3251	2523	729
2.49	.4150	.0850	.66493	.56461	10032	5494	4538	3547	991
2.72	.4300	.0700	.76063	.65134	10929	5116	5812	4600	1213
2.94	.4450	.0550	.84387	.73079	11308	4493	6814	5510	1305
3.17	.4600	.0400	.91007	.79996	11011	3720	7291	6116	1175
3.39	.4750	.0250	.95701	.85719	9983	2901	7081	6312	769
3.62	.4900	.0100	.98538	.90217	8321	2130	6190	6073	118

Tab. 35: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Sigma-Differenz-Tests

$n_1 = 64$ $n_2 = 128$ $p = 0{,}25$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_2	Δ_{21}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}B_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}B_2(d)$	(8)-(9)
-.68	.2275	.2725	.00152	.00133	19	11	8	7	1
-.45	.2350	.2650	.00314	.00273	41	27	14	12	2
-.23	.2425	.2575	.00616	.00535	81	58	23	20	3
0.00	.2500	.2500	.01150	.01000	150	115	34	29	5
.23	.2575	.2425	.02046	.01786	259	212	47	40	7
.45	.2650	.2350	.03471	.03048	423	363	60	50	10
.68	.2725	.2275	.05624	.04973	651	581	70	58	12
.91	.2800	.2200	.08714	.07762	952	872	81	66	15
1.13	.2875	.2125	.12929	.11605	1325	1229	96	76	20
1.36	.2950	.2050	.18392	.16635	1757	1629	128	101	26
1.58	.3025	.1975	.25119	.22891	2228	2035	193	156	37
1.81	.3100	.1900	.32989	.30287	2702	2395	307	256	50
2.04	.3175	.1825	.41734	.38595	3138	2658	480	415	65
2.26	.3250	.1750	.50955	.47464	3491	2782	709	631	78
2.49	.3325	.1675	.60180	.56461	3719	2747	972	887	85
2.72	.3400	.1600	.68923	.65134	3789	2558	1231	1150	81
2.94	.3475	.1525	.76767	.73079	3688	2247	1441	1377	64
3.17	.3550	.1450	.83419	.79996	3423	1860	1563	1529	34
3.39	.3625	.1375	.88743	.85719	3024	1451	1573	1578	-4
3.62	.3700	.1300	.92756	.90217	2538	1065	1473	1518	-45
3.85	.3775	.1225	.95598	.93578	2019	735	1284	1365	-81
4.07	.3850	.1150	.97485	.95965	1520	477	1043	1149	-106
4.30	.3925	.1075	.98655	.97574	1080	289	791	908	-117
4.53	.4000	.1000	.99330	.98607	723	164	559	674	-114

Tab. 36: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Sigma-Differenz-Tests

$n_1 = 50$ $n_2 = 50$ $p = 0{,}1$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_2	Δ_{21}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}B_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}B_2(d)$	(8)-(9)
-.75	.0775	.1225	.00129	.00105	24	0	24	20	4
-.50	.0850	.1150	.00271	.00235	36	0	36	33	2
-.25	.0925	.1075	.00543	.00499	43	0	43	45	-2
.00	.1000	.1000	.01035	.01000	35	0	35	45	-9
.25	.1075	.0925	.01885	.01893	-8	0	-8	14	-22
.50	.1150	.0850	.03279	.03390	-111	0	-111	-69	-42
.75	.1225	.0775	.05459	.05747	-288	0	-288	-214	-75
1.00	.1300	.0700	.08707	.09236	-529	0	-529	-399	-130
1.25	.1375	.0625	.13318	.14089	-771	0	-771	-554	-217
1.50	.1450	.0550	.19548	.20430	-882	0	-882	-552	-330
1.75	.1525	.0475	.27551	.28219	-668	0	-668	-242	-426
2.00	.1600	.0400	.37294	.37208	86	0	86	501	-415
2.25	.1675	.0325	.48497	.46957	1539	0	1539	1704	-164
2.50	.1750	.0250	.60585	.56893	3692	0	3692	3247	445
2.75	.1825	.0175	.72716	.66409	6307	0	6307	4877	1430
3.00	.1900	.0100	.83862	.74973	8888	0	8888	6270	2619
3.25	.1975	.0025	.92977	.82217	10761	0	10761	7137	3623

Tab. 37: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Sigma-Differenz-Tests

$n_1 = 200$ $n_2 = 200$ $p = 0,1$ $\alpha = 0,01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_2	Δ_{21}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}B_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}B_2(d)$	(8)-(9)
-.75	.0888	.1113	.00110	.00105	5	0	5	5	0
-.50	.0925	.1075	.00244	.00235	9	0	9	8	0
-.25	.0963	.1038	.00511	.00499	11	0	11	11	0
.00	.1000	.1000	.01011	.01000	11	0	11	11	0
.25	.1038	.0963	.01896	.01893	3	0	3	3	0
.50	.1075	.0925	.03372	.03390	-18	0	-18	-17	-1
.75	.1113	.0888	.05692	.05747	-56	0	-56	-53	-2
1.00	.1150	.0850	.09132	.09236	-104	0	-104	-100	-5
1.25	.1188	.0813	.13941	.14089	-147	0	-147	-138	-9
1.50	.1225	.0775	.20278	.20430	-152	0	-152	-138	-14
1.75	.1263	.0738	.28141	.28219	-78	0	-78	-60	-18
2.00	.1300	.0700	.37318	.37208	110	0	110	125	-16
2.25	.1338	.0663	.47381	.46957	424	0	424	426	-2
2.50	.1375	.0625	.57731	.56893	838	0	838	812	27
2.75	.1413	.0588	.67694	.66409	1285	0	1285	1219	66
3.00	.1450	.0550	.76646	.74973	1673	0	1673	1567	105
3.25	.1488	.0513	.84132	.82217	1915	0	1915	1784	131
3.50	.1525	.0475	.89934	.87973	1961	0	1961	1831	130
3.75	.1563	.0438	.94084	.92273	1811	0	1811	1710	101
4.00	.1600	.0400	.96806	.95290	1516	0	1516	1465	51
4.25	.1638	.0363	.98432	.97280	1152	0	1152	1156	-4
4.50	.1675	.0325	.99309	.98513	796	0	796	843	-47
4.75	.1713	.0288	.99731	.99232	500	0	500	570	-70
5.00	.1750	.0250	.99910	.99625	285	0	285	357	-73

Tab. 38: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Sigma-Differenz-Tests

$n_1 = 33$ $n_2 = 67$ $p = 0,1$ $\alpha = 0,01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_2	Δ_{21}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}B_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}B_2(d)$	(8)-(9)
-.71	.0775	.1225	.00184	.00122	62	33	30	17	12
-.47	.0850	.1150	.00391	.00258	132	82	50	29	21
-.24	.0925	.1075	.00780	.00521	259	185	74	40	33
.00	.1000	.1000	.01469	.01000	469	378	92	45	47
.24	.1075	.0925	.02624	.01825	799	710	89	29	60
.47	.1150	.0850	.04457	.03172	1285	1235	50	-26	75
.71	.1225	.0775	.07218	.05251	1967	2000	-33	-131	99
.94	.1300	.0700	.11173	.08269	2885	3021	-137	-283	146
1.18	.1375	.0625	.16562	.12490	4072	4266	-197	-441	244
1.41	.1450	.0550	.23545	.17991	5554	5647	-93	-518	425
1.65	.1525	.0475	.32142	.24806	7336	7003	332	-390	723
1.88	.1600	.0400	.42177	.32798	9379	8148	1231	75	1156
2.12	.1675	.0325	.53253	.41666	11564	8898	2666	965	1721
2.35	.1750	.0250	.64752	.50986	13766	9122	4643	2272	2372
2.59	.1825	.0175	.75902	.60250	15653	8781	6872	3858	3014
2.82	.1900	.0100	.85882	.68967	16915	7935	8980	5479	3501
3.06	.1975	.0025	.93952	.76732	17220	6729	10491	6842	3649

Tab. 39: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des Sigma-Differenz-Tests

$n_1 = 132$ $n_2 = 268$ $p = 0{,}1$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_2	Δ_{21}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}B_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}B_2(d)$	(8)-(9)
-.71	.0888	.1113	.00144	.00122	22	16	6	4	2
-.47	.0925	.1075	.00310	.00258	51	41	10	7	3
-.24	.0963	.1038	.00629	.00521	108	93	15	10	5
.00	.1000	.1000	.01207	.01000	207	169	19	11	7
.24	.1038	.0963	.02197	.01825	372	355	17	7	10
.47	.1075	.0925	.03796	.03172	624	618	7	-6	13
.71	.1113	.0888	.06235	.05251	985	1000	-15	-33	17
.94	.1150	.0850	.09753	.08289	1465	1511	-46	-71	25
1.18	.1188	.0813	.14554	.12490	2063	2134	-71	-110	39
1.41	.1225	.0775	.20748	.17991	2757	2823	-66	-130	63
1.65	.1263	.0738	.28309	.24806	3503	3502	1	-98	96
1.88	.1300	.0700	.37033	.32798	4235	4074	161	19	142
2.12	.1338	.0663	.46546	.41668	4878	4449	429	241	188
2.35	.1375	.0625	.56338	.50986	5352	4561	790	568	223
2.59	.1413	.0588	.65839	.60250	5589	4390	1198	964	234
2.82	.1450	.0550	.74517	.68967	5549	3967	1582	1370	212
3.06	.1488	.0513	.81962	.76732	5231	3365	1866	1710	156
3.29	.1525	.0475	.87947	.83276	4671	2677	1994	1923	71
3.53	.1563	.0438	.92440	.88498	3942	1996	1946	1973	-26
3.76	.1600	.0400	.95577	.92441	3136	1393	1743	1861	-118
4.00	.1638	.0363	.97605	.95259	2346	909	1437	1625	-188
4.23	.1675	.0325	.98810	.97165	1645	553	1092	1317	-225
4.47	.1713	.0288	.99464	.98385	1079	313	766	994	-228
4.70	.1750	.0250	.99785	.99124	660	164	496	700	-204

Tab. 40: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des modifizierten Sigma-Differenz-Tests

$n_1 = 12$ $n_2 = 24$ $p = 0{,}5$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	P_1	P_2	ϑ_3	Δ_{31}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}c_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}c_2(d)$	(8)-(9)
-.57	.4500	.5500	.00247	.00191	55	0	55	52	3
-.28	.4750	.5250	.00559	.00454	105	0	105	101	4
0.00	.5000	.5000	.01179	.01000	179	0	179	175	4
.28	.5250	.4750	.02422	.02050	272	0	272	271	1
.57	.5500	.4500	.04256	.03915	371	0	371	378	-7
.85	.5750	.4250	.07436	.06973	463	0	463	482	-19
1.13	.6000	.4000	.12154	.11605	549	0	549	587	-38
1.41	.6250	.3750	.18751	.18085	667	0	667	730	-64
1.70	.6500	.3500	.27354	.26458	896	0	896	986	-90
1.98	.6750	.3250	.37785	.36450	1335	0	1335	1435	-100
2.26	.7000	.3000	.49505	.47464	2040	0	2040	2109	-69
2.55	.7250	.2750	.61633	.58677	2957	0	2957	2941	16
2.83	.7500	.2500	.73108	.69219	3888	0	3888	3756	132
3.11	.7750	.2250	.82923	.78375	4548	0	4548	4335	213
3.39	.8000	.2000	.90404	.85719	4685	0	4685	4506	179
3.68	.8250	.1750	.95378	.91159	4219	0	4219	4222	-3
3.96	.8500	.1500	.98176	.94881	3295	0	3295	3573	-278
4.24	.8750	.1250	.99450	.97234	2217	0	2217	2738	-521
4.53	.9000	.1000	.99867	.98607	1281	0	1281	1904	-624
4.81	.9250	.0750	.99987	.99347	641	0	641	1204	-564
5.09	.9500	.0500	1.00000	.99715	284	0	284	694	-410
5.37	.9750	.0250	1.00000	.99885	115	0	115	365	-250

Tab. 41: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des modifizierten Sigma-Differenz-Tests

$n_1 = 48$ $n_2 = 96$ $p = 0{,}5$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_3	Δ_{31}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}C_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}C_2(d)$	(8)-(9)
-.57	.4750	.5250	.00203	.00191	12	0	12	12	0
-.23	.4875	.5125	.00477	.00454	24	0	24	24	0
0.00	.5000	.5000	.01041	.01000	41	0	41	42	-1
.28	.5125	.4875	.02113	.02050	62	0	62	64	-2
.57	.5250	.4750	.04001	.03915	86	0	86	89	-3
.85	.5375	.4625	.07082	.06973	109	0	109	114	-4
1.13	.5500	.4500	.11738	.11605	133	0	133	138	-6
1.41	.5625	.4375	.18252	.18085	167	0	167	174	-7
1.70	.5750	.4250	.26689	.26458	231	0	231	239	-8
1.98	.5875	.4125	.36798	.36450	347	0	347	354	-7
2.26	.6000	.4000	.47987	.47464	523	0	523	526	-3
2.55	.6125	.3875	.59418	.58677	742	0	742	738	3
2.83	.6250	.3750	.70176	.69219	957	0	957	945	11
3.11	.6375	.3625	.79483	.78375	1108	0	1108	1092	16
3.39	.6500	.3500	.86869	.85719	1150	0	1150	1135	15
3.68	.6625	.3375	.92227	.91159	1068	0	1068	1063	5
3.96	.6750	.3250	.95771	.94881	890	0	890	899	-10
4.24	.6875	.3125	.97898	.97234	665	0	665	689	-24
4.53	.7000	.3000	.99052	.98607	446	0	446	479	-33
4.81	.7125	.2875	.99615	.99347	268	0	268	303	-34
5.09	.7250	.2750	.99860	.99715	145	0	145	174	-29
5.37	.7375	.2625	.99955	.99885	70	0	70	92	-21

Tab. 42: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des modifizierten Sigma-Differenz-Tests

$n_1 = 16$ $n_2 = 32$ $p = 0{,}25$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_3	Δ_{31}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}c_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}c_2(d)$	(8)-(9)
-.68	.2050	.2950	.00147	.00133	15	-16	30	32	-2
-.45	.2200	.2800	.00306	.00273	34	-19	53	54	-1
-.23	.2350	.2650	.00601	.00535	67	-17	83	83	1
0.00	.2500	.2500	.01119	.01000	119	0	119	115	4
.23	.2650	.2350	.01981	.01786	195	43	152	144	8
.45	.2800	.2200	.03348	.03048	301	129	172	159	13
.68	.2950	.2050	.05414	.04973	441	272	169	154	16
.91	.3100	.1900	.08391	.07762	629	484	145	129	16
1.13	.3250	.1750	.12489	.11605	884	764	120	106	14
1.36	.3400	.1600	.17876	.16635	1241	1096	145	132	13
1.58	.3550	.1450	.24635	.22891	1743	1446	298	277	21
1.81	.3700	.1300	.32722	.30287	2435	1765	671	617	53
2.04	.3850	.1150	.41936	.38595	3340	2002	1339	1207	132
2.26	.4000	.1000	.51900	.47464	4436	2115	2322	2050	271
2.49	.4150	.0850	.62096	.56461	5635	2082	3553	3079	474
2.72	.4300	.0700	.71913	.65134	6778	1911	4868	4156	711
2.94	.4450	.0550	.80743	.73079	7664	1632	6032	5108	924
3.17	.4600	.0400	.88088	.79996	8092	1294	6798	5766	1032
3.39	.4750	.0250	.93650	.85719	7932	946	6985	6017	968
3.62	.4900	.0100	.97387	.90217	7170	634	6536	5832	704

Tab. 43: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des modifizierten Sigma-Differenz-Tests

$n_1 = 64$ $n_2 = 128$ $p = 0{,}25$ $\alpha = 0{,}01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_3	Δ_{31}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}C_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}C_2(d)$	(8)-(9)
-.68	.2275	.2725	.00133	.00133	0	-8	8	8	0
-.45	.2350	.2650	.00276	.00273	4	-10	13	14	-1
-.23	.2425	.2575	.00547	.00535	12	-8	21	21	0
0.00	.2500	.2500	.01029	.01000	29	0	29	29	0
.23	.2575	.2425	.01845	.01786	59	22	37	36	1
.45	.2650	.2350	.03154	.03048	106	64	42	40	2
.68	.2725	.2275	.05150	.04973	178	136	42	38	3
.91	.2800	.2200	.08041	.07762	279	242	37	32	4
1.13	.2875	.2125	.12019	.11605	414	382	32	26	6
1.36	.2950	.2050	.17223	.16635	589	548	41	33	8
1.58	.3025	.1975	.23694	.22891	803	723	80	69	10
1.81	.3100	.1900	.31339	.30287	1052	882	169	154	15
2.04	.3175	.1825	.39919	.38595	1324	1001	323	302	21
2.26	.3250	.1750	.49063	.47464	1599	1057	542	513	29
2.49	.3325	.1675	.58309	.56461	1848	1041	807	770	37
2.72	.3400	.1600	.67172	.65134	2038	955	1082	1039	43
2.94	.3475	.1525	.75217	.73079	2138	816	1322	1277	45
3.17	.3550	.1450	.82124	.79996	2127	647	1481	1441	39
3.39	.3625	.1375	.87723	.85719	2004	473	1531	1504	26
3.62	.3700	.1300	.92000	.90217	1782	317	1466	1458	7
3.85	.3775	.1225	.95073	.93578	1494	191	1303	1318	-14
4.07	.3850	.1150	.97144	.95965	1179	101	1078	1113	-35
4.30	.3925	.1075	.98448	.97574	874	43	831	881	-50
4.53	.4000	.1000	.99214	.98607	607	10	597	655	-57

Tab. 44: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des modifizierten Sigma-Differenz-Tests

$n_1 = 33$ $n_2 = 67$ $p = 0,1$ $\alpha = 0,01$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_3	L_{31}	(4)-(5)	$n^{-1}C_1(d)$	(6)-(7)	$n^{-2}C_2(d)$	(8)-(9)
-.71	.0775	.1225	.00124	.00122	3	-24	27	26	1
-.47	.0850	.1150	.00271	.00258	13	-31	44	38	6
-.24	.0925	.1075	.00554	.00521	32	-28	60	46	14
.00	.1000	.1000	.01067	.01000	67	0	67	39	28
.24	.1075	.0925	.01947	.01825	122	75	47	1	46
.47	.1150	.0850	.03377	.03172	205	225	-20	-87	67
.71	.1225	.0775	.05583	.05251	332	480	-147	-235	88
.94	.1300	.0700	.08820	.08289	531	857	-325	-428	103
1.18	.1375	.0625	.13342	.12490	851	1351	-500	-611	111
1.41	.1450	.0550	.19357	.17991	1366	1928	-562	-680	119
1.65	.1525	.0475	.26975	.24806	2169	2516	-347	-496	150
1.88	.1600	.0400	.36149	.32798	3351	3026	325	72	253
2.12	.1675	.0325	.46630	.41668	4962	3366	1596	1104	492
2.35	.1750	.0250	.57944	.50986	6962	3466	3495	2565	930
2.59	.1825	.0175	.69434	.60250	9184	3312	5872	4287	1585
2.82	.1900	.0100	.80281	.68967	11314	2930	8384	5998	2385
3.06	.1975	.0025	.89658	.76732	12926	2396	10530	7390	3140

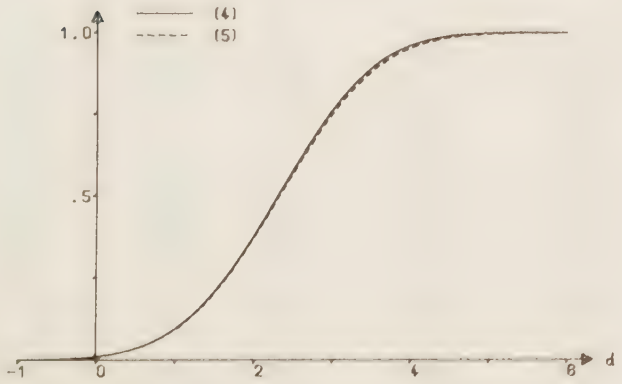
Tab. 45: Asymptotische Entwicklung der Gütefunktion des modifizierten Sigma-Differenz-Tests

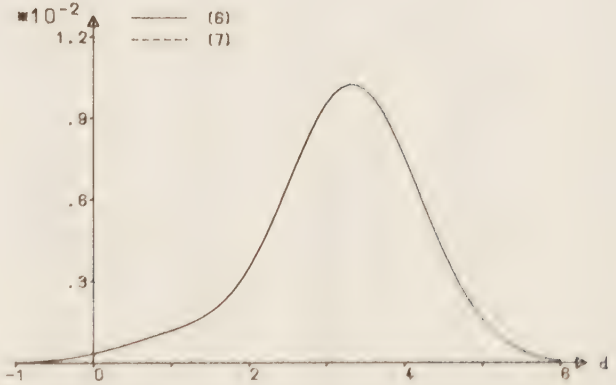
$n_1 = 132$ $n_2 = 268$ $p = 0{,}1$ $\alpha = 0{,}01$

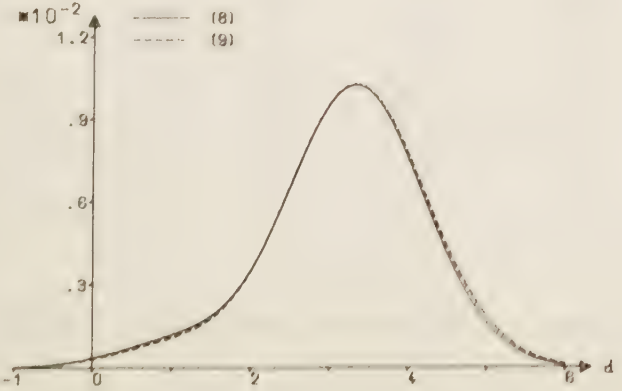
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
d	p_1	p_2	g_3	Δ_{31}	(4)-(5)	$\sigma^{-1}C_1(d)$	(6)-(7)	$\sigma^{-2}C_2(d)$	(8)-(9)
-.71	.0888	.1113	.00115	.00122	-6	-12	6	6	-1
-.47	.0925	.1075	.00252	.00258	-7	-15	9	9	-1
-.24	.0963	.1038	.00519	.00521	-3	-14	11	11	0
.00	.1000	.1000	.01010	.01000	10	0	10	10	1
.24	.1038	.0963	.01865	.01825	39	37	2	0	2
.47	.1075	.0925	.03265	.03172	94	113	-19	-22	3
.71	.1113	.0888	.05436	.05251	186	240	-54	-59	5
.94	.1150	.0850	.08617	.08289	328	428	-100	-107	7
1.18	.1188	.0813	.13024	.12490	534	676	-142	-153	11
1.41	.1225	.0775	.18803	.17991	812	964	-152	-170	19
1.65	.1263	.0738	.25971	.24806	1165	1258	-94	-124	31
1.88	.1300	.0700	.34378	.32798	1580	1513	67	18	49
2.12	.1338	.0663	.43699	.41668	2031	1683	349	276	72
2.35	.1375	.0625	.53459	.50986	2473	1734	739	641	98
2.59	.1413	.0588	.63098	.60250	2848	1656	1192	1072	121
2.82	.1450	.0550	.72065	.68967	3098	1465	1632	1500	133
3.06	.1488	.0513	.79905	.76732	3174	1198	1976	1847	128
3.29	.1525	.0475	.86334	.83276	3058	901	2156	2052	104
3.53	.1563	.0438	.91262	.88498	2764	619	2145	2082	63
3.76	.1600	.0400	.94780	.92441	2339	383	1955	1945	10
4.00	.1638	.0363	.97107	.95259	1849	208	1641	1683	-42
4.23	.1675	.0325	.98526	.97165	1362	93	1269	1353	-84
4.47	.1713	.0288	.99318	.98385	933	27	906	1014	-108
4.70	.1750	.0250	.99717	.99124	592	-4	597	709	-113

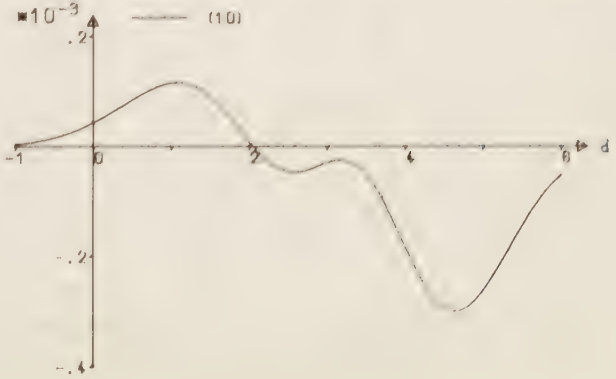
Figur 9: ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG DER GUETEFUNKTION DES SIGMA-DIFFERENZ-TESTS

N_1 = 72 N_2 = 72 P = .50 ALPHA = .01



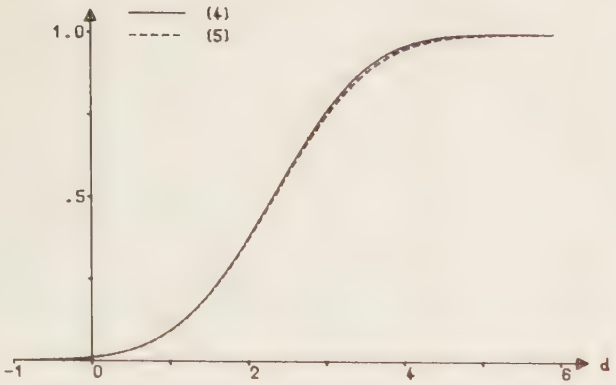


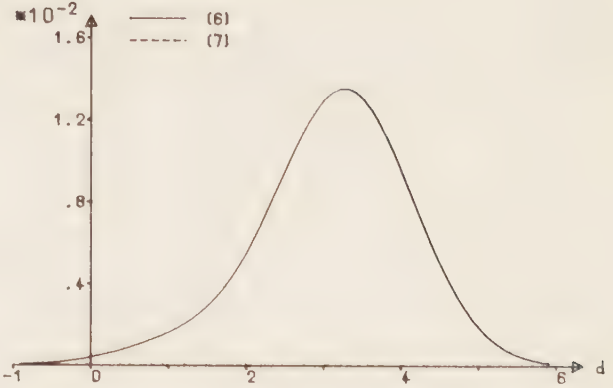


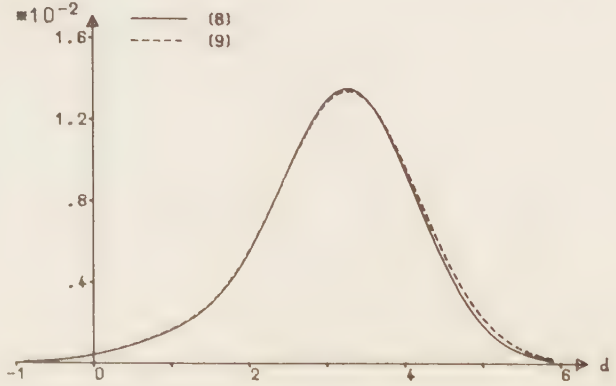


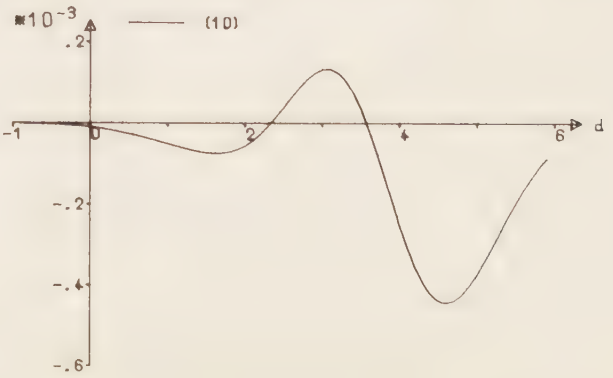
Figur 10: ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG DER GUETEFUNKTION DES SIGMA-DIFFERENZ-TESTS

N_1 = 48 N_2 = 96 P = .50 ALPHA = .01



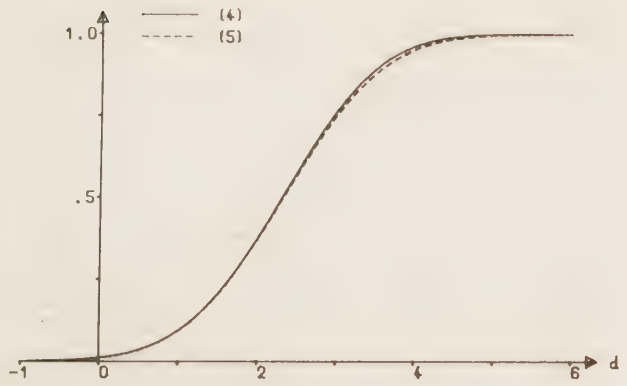


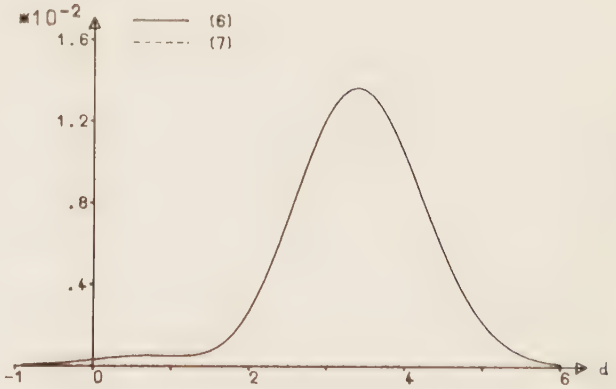


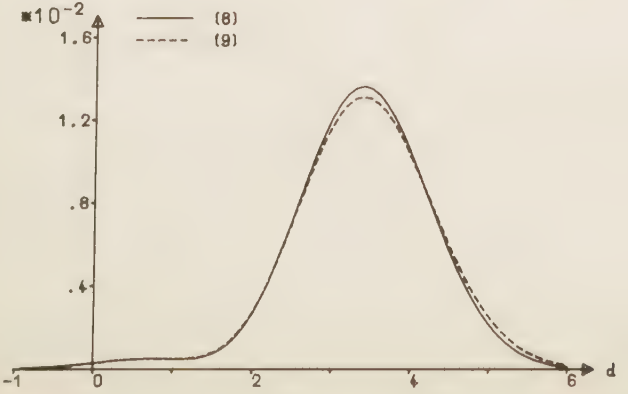


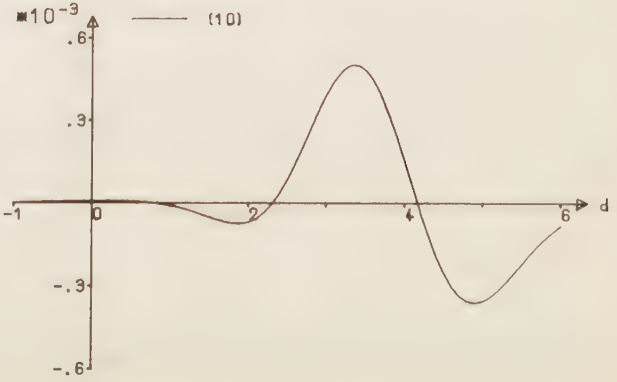
Figur 11: ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG DER GUETEFUNKTION DES SIGMA-DIFFERENZ-TESTS

N_1 = 96 N_2 = 96 P = .25 ALPHA = .01



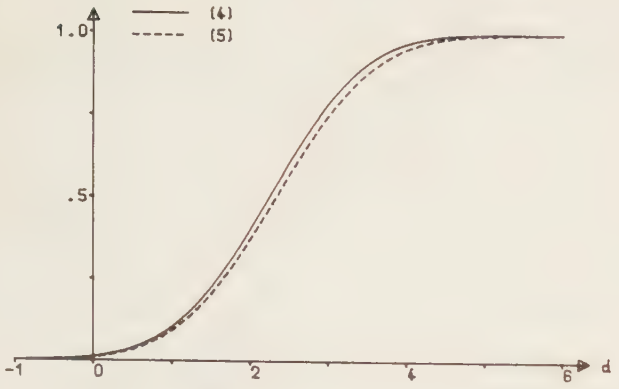


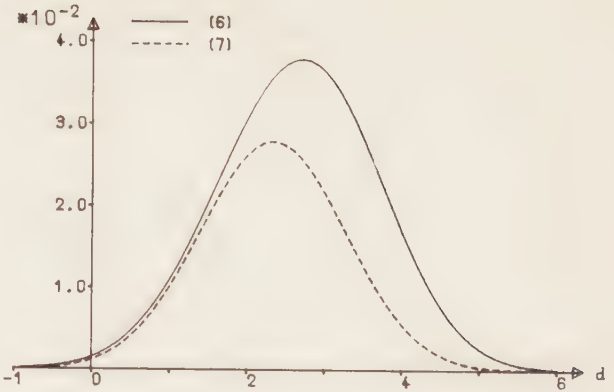


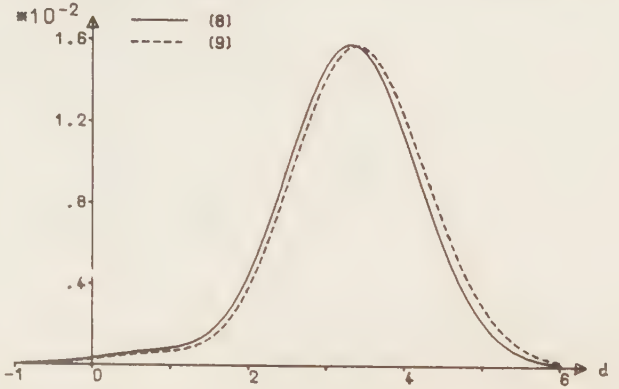


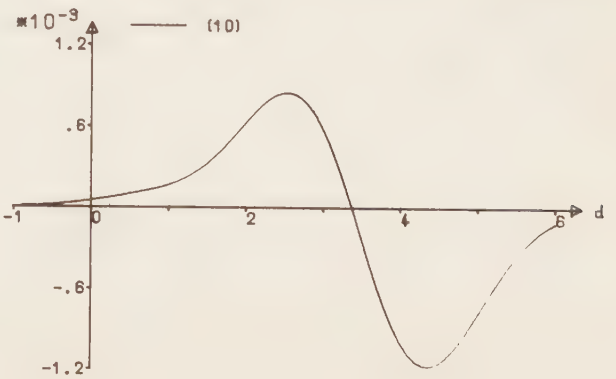
Figur 12: ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG DER GUETEFUNKTION DES SIGMA-DIFFERENZ-TESTS

N_1 = 64 N_2 = 128 P = .25 ALPHA = .01



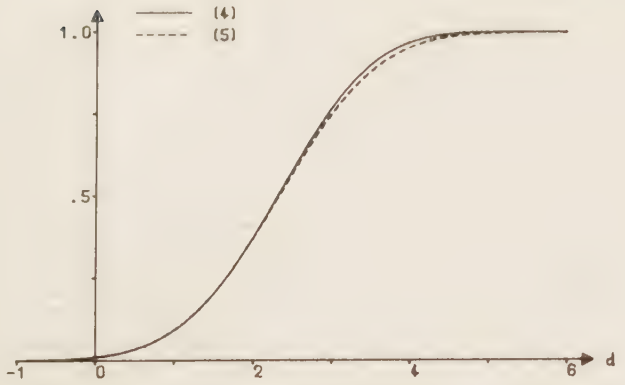


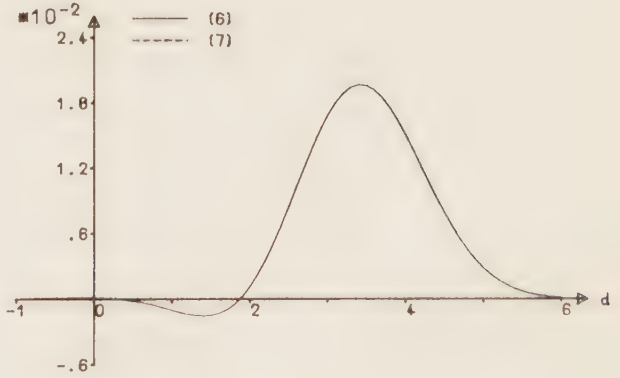


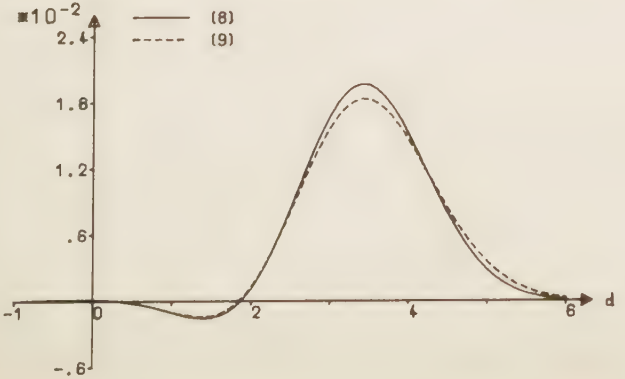


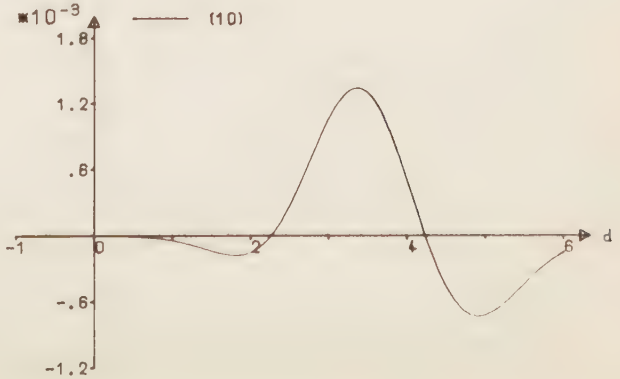
Figur 13: ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG DER GUETEFUNKTION DES SIGMA-DIFFERENZ-TESTS

N_1 = 200 N_2 = 200 P = .10 ALPHA = .01



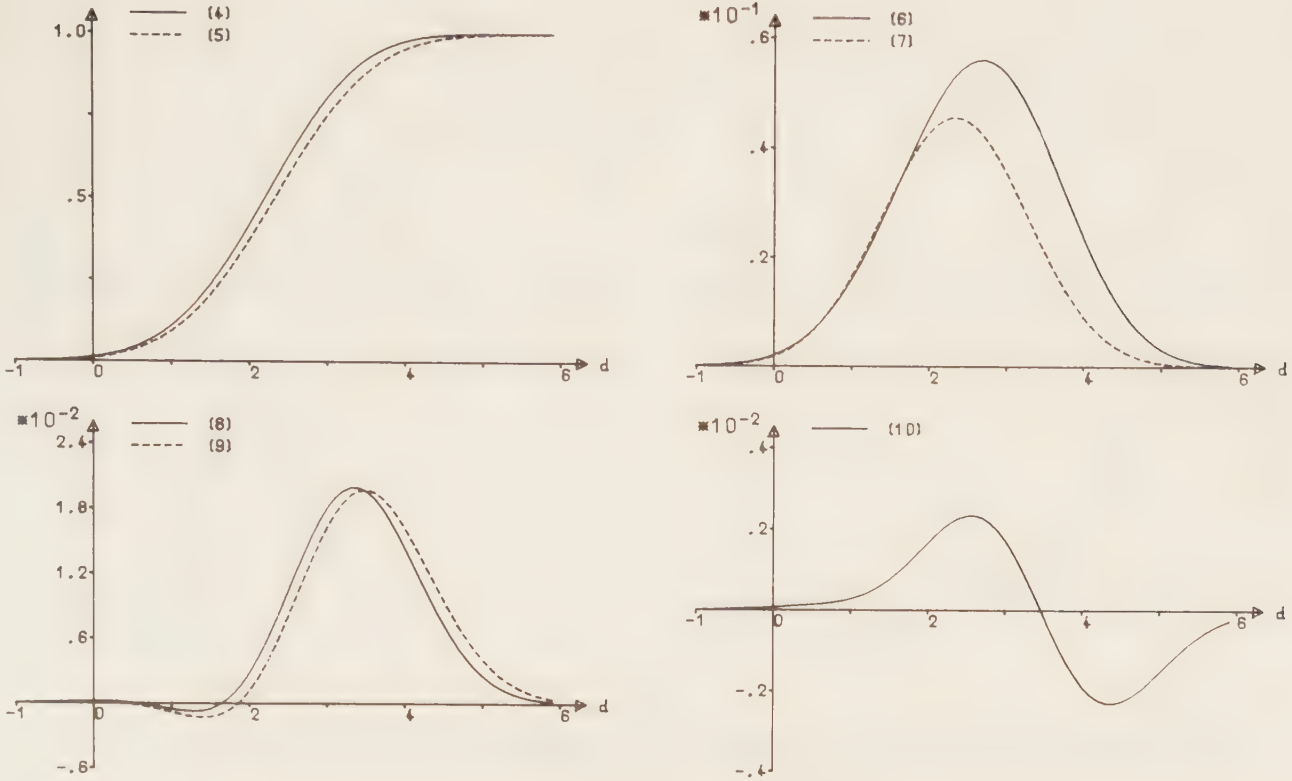






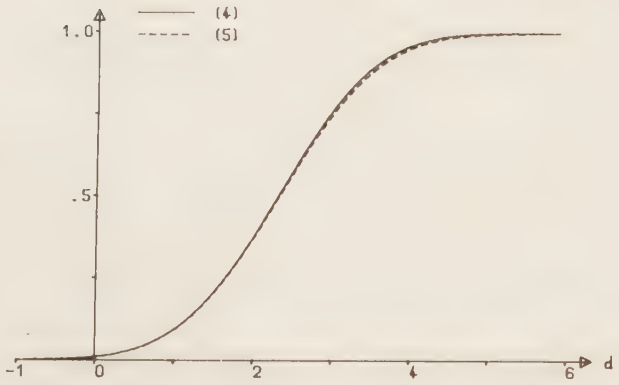
Figur 14: ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG DER GUETEFUNKTION DES SIGMA-DIFFERENZ-TESTS

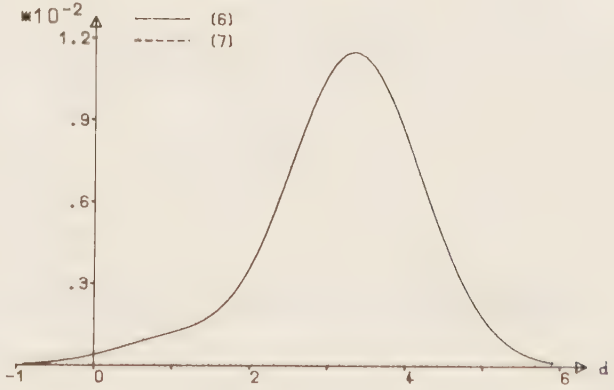
N_1 = 132 N_2 = 268 P = .10 ALPHA = .01

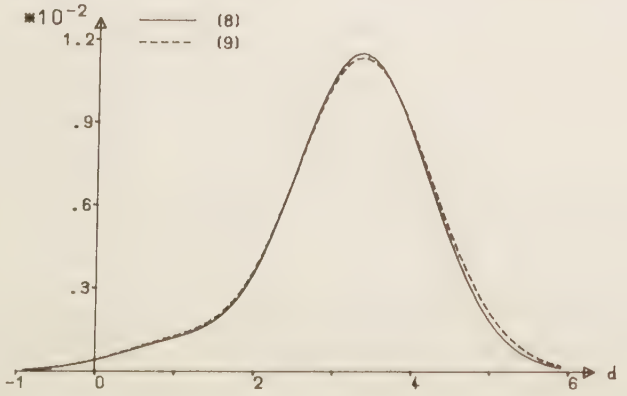


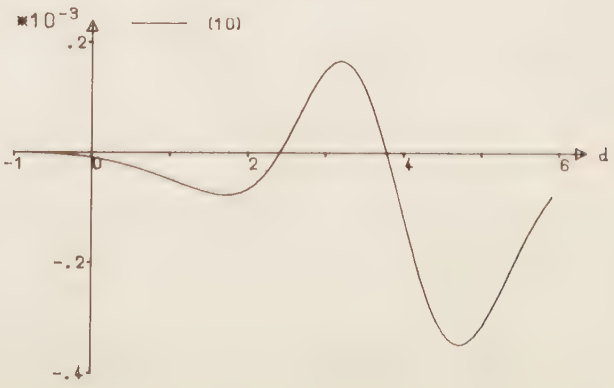
Figur 15: ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG DER GUETEFUNKTION DES MOD. SIGMA-DIFFERENZ-TESTS

N_1 = 48 N_2 = 96 P = .50 ALPHA = .01



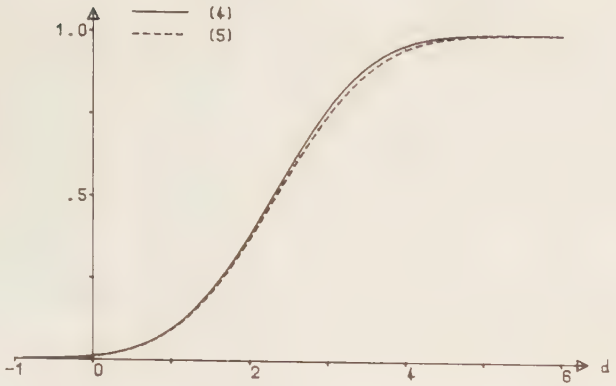


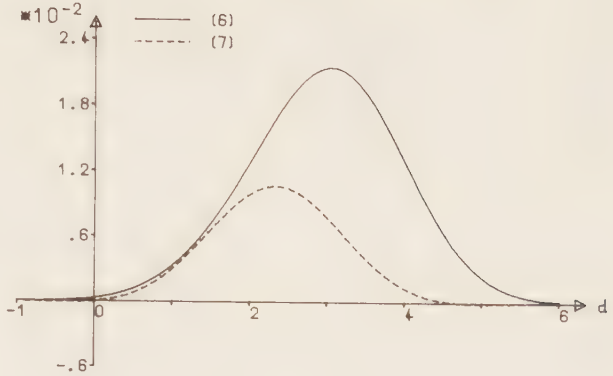


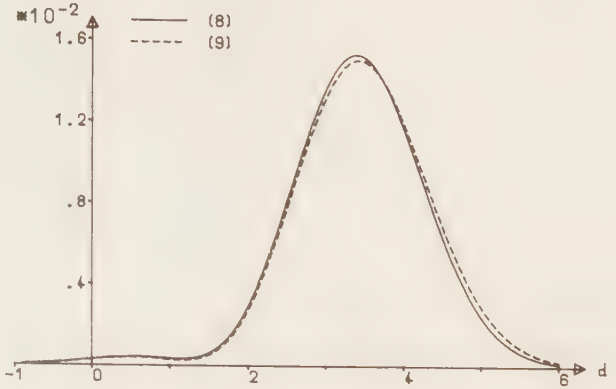


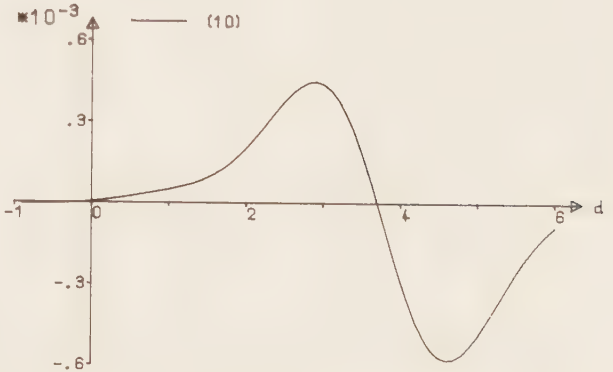
Figur 16: ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG DER GUETEFUNKTION DES MOD. SIGMA-DIFFERENZ-TESTS

N_1 = 64 N_2 = 128 P = .25 ALPHA = .01



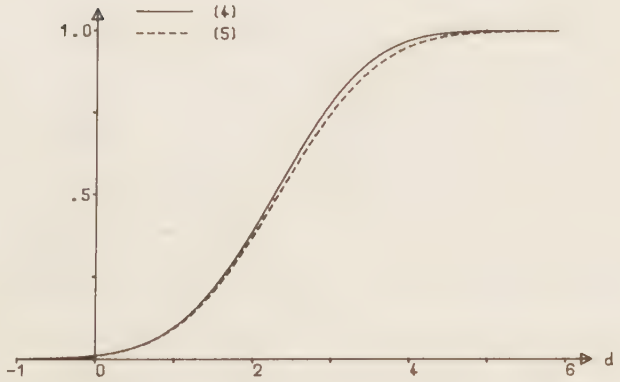


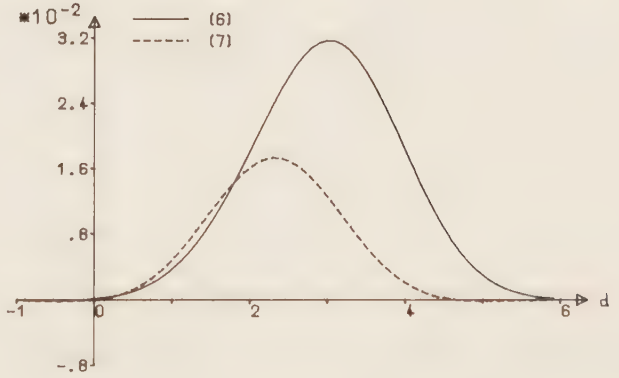


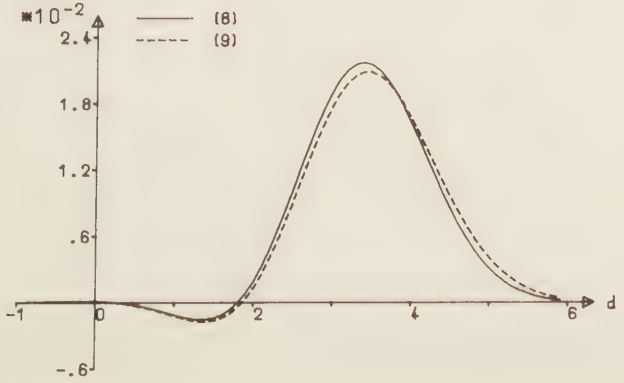


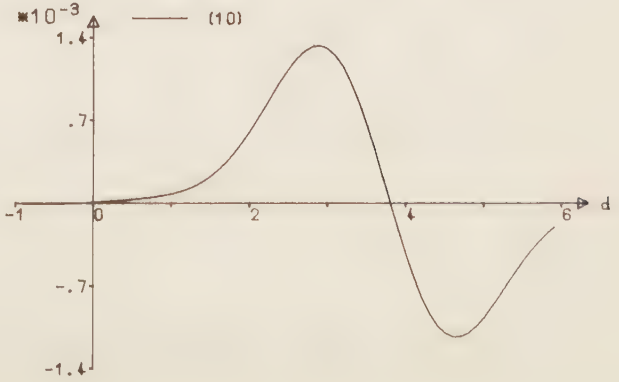
Figur 17: ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNG DER GUETEFUNKTION DES MOD. SIGMA-DIFFERENZ-TESTS

N_1 = 132 N_2 = 268 P = .10 ALPHA = .01









4.3 Die asymptotischen Defizienzen der Tests

Durch die asymptotischen Entwicklungen der Gütefunktionen g_1, g_2 und g_3 können wir einen Vergleich der Macht der Tests auf der Grundlage der asymptotischen Defizienzen vornehmen. Das Konzept der asymptotischen Defizienz ist eine Weiterentwicklung der asymptotischen relativen Effizienz (vgl. Hodges und Lehmann (1970)).

Der Grenzprozeß, der zu den Entwicklungen der Gütefunktionen führte, wird so eingeschränkt, daß λ, p, α und $\delta = (p_1-p_2)\sqrt{n}$ konstant sind für $n\to\infty$[1]. Im folgenden seien λ, p, α und $\delta>0$ fest vorgegeben; die Gütefunktionen g_1, g_2 und g_3 hängen dann nur noch von n ab. Zu $n\in\mathbb{N}$ sei $k_{12}\in\mathbb{R}$ so gewählt, daß

$$g_1(n) = g_2(k_{12})^{2)} \tag{4.3}$$

erfüllt ist. Existieren die eigentlichen oder uneigentlichen Grenzwerte

$$ARE_{12} = \lim_{n\to\infty} \frac{k_{12}}{n}$$

$$D_{12} = \lim_{n\to\infty}(k_{12}-n),$$

so heißen sie die asymptotische relative Effizienz (ARE) bzw. die asymptotische Defizienz des Tests von Fisher-Yates zum Sigma-Differenz-Test. Analog werden die asymptotischen relativen

---

1) da wir jetzt nach Potenzen von n ordnen, beschreiben wir den eingeschränkten Grenzprozeß durch $n\to\infty$

2) g_2 ist für reelle Argumente zu definieren; vgl. dazu Hodges und Lehmann (1970)

Effizienzen und asymptotischen Defizienzen der anderen Tests definiert.

Zur Berechnung der Defizienz genügt es, anstelle von (4.3) die Gleichheit der Entwicklungen der Gütefunktionen g_1 und g_2 zu fordern; daraus läßt sich eine Entwicklung für k_{12} finden. Aus (3.4), (4.1) und (4.2) erhält man für $n \to \infty$

$$k_{12} = n - \sqrt{n}\left(\frac{(1-2p)(1-2\lambda)(z^2-1)}{3\lambda(1-\lambda)\delta}\right) + o(\sqrt{n})$$

$$k_{23} = n + \sqrt{n}\left(\frac{(1-2p)(1-2\lambda)(z^2-1)}{3\lambda(1-\lambda)\delta}\right) + o(\sqrt{n})$$

$$k_{13} = n - \frac{c_1}{288(\lambda(1-\lambda))^2 pq\delta^2} + o(1)$$

mit c_1 wie in Satz 6.

Daraus folgt

$$ARE_{12} = ARE_{23} = ARE_{13} = 1,$$

d.h. die behandelten Tests werden als gleichwertig angesehen, wenn man als Grundlage des Vergleichs die ARE wählt. Dies beruht darauf, daß die ARE nur von den asymptotischen Gütefunktionen abhängt, die für alle Tests gleich sind. Das feinere Konzept der asymptotischen Defizienz bezieht weitere Glieder der asymptotischen Entwicklungen der Gütefunktionen mit ein. Man erhält

$$|D_{12}| = \infty \quad \text{falls } (1-2p)(1-2\lambda)(z^2-1) \neq 0$$

$$|D_{23}| = \infty \quad \text{falls } (1-2p)(1-2\lambda)(z^2-1) \neq 0;$$

D_{13} existiert nicht, da I_1 in c_1 von n abhängt, aber es existiert eine natürliche Zahl m mit $|k_{13}-n| \leq m$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die schon in Abschnitt 4.2 anhand ihrer asymptotischen Entwicklungen festgestellten Beziehungen der Tests kommen auch hier zum Ausdruck. Durch eine für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkte Anzahl m von zusätzlichen Stichproben sind Differenzen in der Macht zwischen dem modifizierten Sigma-Differenz-Test und dem Test von Fisher-Yates auszugleichen. Dies gilt nicht für den modifizierten Sigma-Differenz-Test und den Test von Fisher-Yates einerseits und dem Sigma-Differenz-Test andererseits. Numerischen Untersuchungen bleibt es vorbehalten, den Wert für m zu bestimmen.

Literaturverzeichnis

Albers, W. (1974): Asymptotic expansions and the deficiency concept in statistics
Mathematical centre tracts 58, Amsterdam

Bennett, B.M. und Hsu, P. (1960): On the power function of the exact test for the 2 × 2 contingency table
Biometrika 47, S. 393 - 398

Berchtold, H. (1972): Vertrauensgrenzen und Vergleich zweier Wahrscheinlichkeiten
Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete 22, S. 112 - 119

Berg, L. (1968): Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

Eeden, C. van und Runnenburg, J.Th. (1960): Conditional limit-distributions for the entries in a 2 × 2 table
Statistica Neerlandica 14, S. 111 - 126

Erdélyi, A. (1956): Asymptotic expansions
Dover, New York

Feller, W. (1971): An introduction to probability theory and its applications
Wiley, New York, 2. Aufl.

Hemelrijk, J. (1962): De asymptotische eigenschappen van de binomiale verdeling
Statistica Neerlandica 16, S. 255 - 258

Hodges Jr., J.L. und Lehmann, E.L. (1970): Deficiency
Annals of Mathematical Statistics 41, S. 783 - 801

Knopp, K. (1964): Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen
Springer, Berlin, 5. Aufl.

Knüsel, L. (1972): Zum zentralen Grenzwertsatz. Inversion der Edgeworth-Entwicklung bei gitterförmigen Verteilungen mit Anwendungen auf die Binomial- und Poissonverteilung
Vervielfältigtes Manuskript, Mannheim

Knüsel, L. (1978): Unveröffentlichtes Manuskript, München

Lehmann, E.L. (1959): Testing statistical hypotheses
Wiley, New York

Molenaar, W. (1973): Approximations to the Poisson, binomial and hypergeometric distribution functions
Mathematical centre tracts 31, Amsterdam

Patnaik, P.B. (1948): The power function of the test for the difference between two proportions in a 2×2 table
Biometrika 35, S. 157 - 173

Sillitto, G.P. (1949): Note on approximations to the power function of the '2×2 comparative trial'
Biometrika 36, S. 347 - 352

Waerden, B.L. van der (1971): Mathematische Statistik
Springer, Berlin, 3. Aufl.

Witting, H. (1974): Mathematische Statistik
Teubner, Stuttgart, 2. Aufl.

Anhang

Tab. I:

$$\alpha_1 = (1-2p_1)g^{-2} - (1-2p_2)h^{-2}$$

$$\alpha_2 = 3(1-2p_2)h^{-2}s$$

$$\alpha_3 = -3(1-2p_2)h^{-2}s^2 - 3\{(1-2p_1)g^{-1} - (1-2p_2)h^{-1}\}$$

$$\alpha_4 = (1-2p_2)h^{-2}s^3 - 3(1-2p_2)h^{-1}s$$

$$\alpha_5 = (1-2p)^2(1-2\lambda)^2\lambda^{-4}(1-\lambda)^{-4}$$

$$\alpha_6 = 6(1-2p)^2(1-2\lambda)\lambda^{-2}(1-\lambda)^{-4}s$$

$$\alpha_7 = 3(1-2p)^2\{5(1-\lambda)^{-4} - 2\lambda^{-2}(1-\lambda)^{-2}\}s^2$$
$$+ 6\{(1-2p)^2\lambda^{-2}(1-\lambda)^{-2} - (2-7p+7p^2)(\lambda^{-3} + (1-\lambda)^{-3})\}$$

$$\alpha_8 = 2(1-2p)^2\{-10(1-\lambda)^{-4} + \lambda^{-2}(1-\lambda)^{-2}\}s^3$$
$$+ 6\{-(1-2p)^2(3\lambda^{-1}(1-\lambda)^{-2} + \lambda^{-2}(1-\lambda)^{-1})$$
$$+ 4(2-7p+7p^2)(1-\lambda)^{-3}\}s$$

$$\alpha_9 = 15(1-2p)^2(1-\lambda)^{-4}s^4$$
$$+ 18\{(1-2p)^2\lambda^{-1}(1-\lambda)^{-2} - 2(2-7p+7p^2)(1-\lambda)^{-3}\}s^2$$
$$+ 9\{-2(1-2p)^2\lambda^{-1}(1-\lambda)^{-1} + (3-8p+8p^2)(\lambda^{-2} + (1-\lambda)^{-2})\}$$

$$\alpha_{10} = -6(1-2p)^2(1-\lambda)^{-4}s^5$$

$$+ 6\{-(1-2p)^2\lambda^{-1}(1-\lambda)^{-2} + 4(2-7p+7p^2)(1-\lambda)^{-3}\}s^3$$

$$+ 18\{(1-2p)^2\lambda^{-1}(1-\lambda)^{-1} - (3-8p+8p^2)(1-\lambda)^{-2}\}s$$

$$\alpha_{11} = (1-2p)^2(1-\lambda)^{-4}s^6 - 6(2-7p+7p^2)(1-\lambda)^{-3}s^4$$

$$+ 9(3-8p+8p^2)(1-\lambda)^{-2}s^2 - 6(1-p+p^2)\lambda^{-1}(1-\lambda)^{-1}$$

In α_5 - α_{11} wird benutzt:

$$p_1 = p + o(1)$$

$$p_2 = p + o(1)$$

$$q = [illegible] + o(1)$$

$$h = (1-[illegible]) + o(1)$$

Tab. II:

$$\gamma_1 = (g+h)^{-3}\left[(1-2p_1)g + (1-2p_2)h\right]$$

$$\gamma_2 = (g+h)^{-2}\left[-3(1-2p_1)g - 3(1-2p_2)h\right]$$

$$\gamma_3 = (g+h)^{-\frac{1}{2}}g^{-\frac{3}{2}}h^{-\frac{3}{2}}\left[-(1-2p_1)h^2 + (1-2p_2)g^2\right]$$

$$\gamma_4 = (g+h)^{-\frac{3}{2}}g^{-\frac{1}{2}}h^{-\frac{3}{2}}\left[-(1-2p_1)h^2 + (1-2p_2)(-2g^2-3gh)\right]$$

$$\gamma_5 = (g+h)^{-\frac{5}{2}}g^{\frac{1}{2}}h^{-\frac{3}{2}}\left[-(1-2p_1)h^2 + (1-2p_2)(g^2+3gh+3h^2)\right]$$

$$\gamma_6 = (g+h)^{-\frac{3}{2}}g^{-\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}}\left[(1-2p_1)(h^2+3gh) - (1-2p_2)(g^2+3gh)\right]$$

$$\gamma_7 = \lambda^{-\frac{7}{2}}(1-\lambda)^{-\frac{7}{2}}(1-2p)^2(-4\lambda^2+4\lambda-1)$$

$$\gamma_8 = \lambda^{-\frac{5}{2}}(1-\lambda)^{-\frac{7}{2}}(1-2p)^2(8\lambda^2-2\lambda-1)$$

$$\gamma_9 = \lambda^{-\frac{3}{2}}(1-\lambda)^{-\frac{7}{2}}(1-2p)^2(-\lambda^2-14\lambda+5)$$

$$\gamma_{10} = \lambda^{-\frac{5}{2}}(1-\lambda)^{-\frac{5}{2}}\left[(1-2p)^2(-14\lambda^2+14\lambda-5) - 6(2-7p+7p^2)(-3\lambda^2+3\lambda-1)\right]$$

$$\gamma_{11} = \lambda^{-\frac{3}{2}}(1-\lambda)^{-\frac{7}{2}}(1-2p)^2(-\lambda^3+4\lambda^2+9\lambda-2)$$

$$\gamma_{12} = \lambda^{-\frac{3}{2}}(1-\lambda)^{-\frac{5}{2}}\left[(1-2p)^2(6\lambda^2+12\lambda-3) - 6(2-7p+7p^2)(\lambda^2+3\lambda-1)\right]$$

$$\gamma_{13} = \lambda^{-\frac{1}{2}}(1-\lambda)^{-\frac{7}{2}}(1-2p)^2(-\lambda^3+4\lambda^2-6\lambda-2)$$

$$\gamma_{14} = \lambda^{-\frac{1}{2}}(1-\lambda)^{-\frac{5}{2}}\left[3(1-2p)^2(\lambda^2-4\lambda-2) - 6(2-7p+7p^2)(\lambda^2-3\lambda-1)\right]$$

$$\gamma_{15} = \lambda^{-\frac{3}{2}}(1-\lambda)^{-\frac{3}{2}}\left[-15(1-2p)^2(1-2\lambda)^2 - 18(2-7p+7p^2)(-3\lambda^2+3\lambda-1)\right.$$
$$\left. + 9(3-8p+8p)^2(-2\lambda^2+2\lambda-1) + 3\right]$$

γ_{16} - γ_{18} werden im Beweis nicht weiter benötigt. In γ_7 - γ_{15} sind wieder benutzt:

$$p_1 = p + o(1)$$

$$p_2 = p + o(1)$$

$$q = \lambda + o(1)$$

$$h = 1-\lambda + o(1)$$

Tab. III:

$$\delta_1 = 1$$

$$\delta_2 = (\lambda(1-\lambda))^{\frac{1}{2}}(z-d)$$

$$\delta_3 = \frac{1}{2}(\lambda(1-\lambda))^{\frac{1}{2}}(1-2p)z$$

$$\delta_4 = \frac{1}{12}(1-2\lambda)(1-2p)\{-3zd + 2(z^2-1)\}$$

$$\delta_5 = \frac{1}{2}(1-2p)(-2d+z)$$

$$\delta_6 = \frac{1}{12}(1-2\lambda)(\lambda(1-\lambda))^{-\frac{1}{2}}(1-2p)\{3d^2 - 6zd + 2(z^2-1)\}$$

$$\delta_7 = -\frac{1}{8}z$$

$$\delta_8 = \frac{1}{12}(1-2\lambda)(\lambda(1-\lambda))^{-\frac{1}{2}}\{-3(1-2p)^2d^2 + 6p(1-p)zd - 4p(1-p)(z^2-1)\}$$

$$\begin{aligned}\delta_9 = \frac{1}{288}(\lambda(1-\lambda))^{-1}\{&9((1-2\lambda)^2(1-2p)^2 + 12p(1-p) - 4)d^3\\ &- 36z((1-2\lambda)^2p(1-p) + 3p(1-p) - 1)d^2\\ &- 12(1-2\lambda)^2(1-8p(1-p))(z^2-1)d\\ &+ 4z(-2 + 14\lambda(1-\lambda) + 14p(1-p) - 74\lambda(1-\lambda)p(1-p))\\ &- 4z^3(1 + 2\lambda(1-\lambda) + 2p(1-p) - 26\lambda(1-\lambda)p(1-p))\}\end{aligned}$$

Tab. IV:

$\lambda_1 = \delta_1^2\gamma_3 + \delta_1\gamma_4 + \gamma_5$

$\lambda_3 = \delta_2^2\gamma_3 + \gamma_6 + 6\delta_6$

$\lambda_5 = \delta_2(5\delta_1^4\gamma_7 + 4\delta_1^3\gamma_8 + 3\delta_1^2\gamma_9 + 2\delta_1\gamma_{11} + \gamma_{13}) + 12\delta_5\gamma_1$

$\lambda_7 = \delta_2^3(10\delta_1^2\gamma_7 + 4\delta_1\gamma_8 + \gamma_9) + \delta_2(3\delta_1^2\gamma_{10} + 2\delta_1\gamma_{12} + \gamma_{14})$

$+ 72\delta_7 - 36(z-d)\delta_5^2 + 12\delta_5\gamma_2 - 12(z-d)\delta_2\delta_5(2\delta_1\gamma_3 + \gamma_4)$

$- 12(z-d)\delta_6(\delta_1^2\gamma_3 + \delta_1\gamma_4 + \gamma_5) + 12\delta_3(2\delta_1\gamma_3 + \gamma_4)$

$\lambda_9 = \delta_2^5\gamma_7 + \delta_2^3\gamma_{10} + \delta_2\gamma_{15} + 72\delta_9 - 36(z-d)^2\delta_6$

$- 12(z-d)\delta_6(\delta_2^2\gamma_3 + \gamma_6) + 24\delta_2\delta_4\gamma_3 .$

$\gamma_1 - \gamma_{15}$ und $\delta_1 - \delta_9$ sind in den Tabellen II und III erklärt; $\lambda_2, \lambda_4, \lambda_6, \lambda_8$ werden im Beweis nicht weiter benötigt.

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \rho^2} = \frac{n}{2(1-\rho^2)^2} - \sum_{t=1}^{n} \frac{(1+\rho^2)(y_{t-1}-\beta x_{t-1})^2 - 2\rho(y_t-\beta x_t)(y_{t-1}-\beta x_{t-1})}{(1-\rho^2)^3}$$

$$+ \frac{(y_t-\beta x_t)^2 + (y_{t-1}-\beta x_{t-1})^2 - 2\rho(y_t-\beta x_t)(y_{t-1}-\beta x_{t-1})}{(1-\rho^2)^2}$$

Tab. VI:

$$\delta_{21} = \lambda$$

$$\delta_{22} = (\lambda(1-\lambda))^{\frac{1}{2}}(z-d)$$

$$\delta_{23} = \frac{1}{2}(\lambda(1-\lambda))^{\frac{1}{2}}(1-2p)z$$

$$\delta_{24} = \frac{1}{12}(1-2\lambda)(1-2p)(-3zd + 2(z^2-1))$$

$$\delta_{25} = \frac{1}{2}(1-2p)(-2d+z)$$

$$\delta_{26} = \frac{1}{12}(1-2\lambda)(\lambda(1-\lambda))^{-\frac{1}{2}}(1-2p)(3d^2 - 6zd + 2(z^2-1))$$

$$\delta_{27} = -\frac{1}{8}z$$

$$\delta_{28} = \frac{1}{12}(1-2\lambda)(\lambda(1-\lambda))^{-\frac{1}{2}}(-3(1-2p)^2d^2 + 6p(1-p)zd - 4p(1-p)(z^2-1))$$

$$\delta_{29} = \frac{1}{96}(\lambda(1-\lambda))^{-1}\{3((1-2\lambda)^2(1-2p)^2 + 12p(1-p) - 4)d^3$$

$$- 12z((1-2\lambda)^2p(1-p) + 3p(1-p) - 1)d^2$$

$$- 4(1-2\lambda)^2(1-8p(1-p))(z^2-1)d\}$$

L e b e n s l a u f

Name:	Jürgen M i c h a l k
Geboren:	13. April 1948 in Rattwitz, Kr. Bautzen
Eltern:	Heinz Michalk, Geschäftsführer Charlotte Michalk, geb. Kurze, Hausfrau
Familienstand:	verheiratet seit 18. Oktober 1973 mit Carmen Michalk, geb. Seth
Schulen:	1954 - 1955 Volksschule Bautzen 1955 - 1957 Volksschule Freiburg 1957 - 1959 Volksschule Gelsenkirchen 1959 - 1962 Grillo-Gymnasium Gelsenkirchen 1962 - 1967 Kepler-Gymnasium Freiburg 13. Juni 1967 Reifeprüfung
Grundwehrdienst:	1. Oktober 1967 - 31. März 1969
Studium:	SS 1969 - SS 1973 Betriebswirtschaftslehre an der Universität Mannheim 25. Oktober 1973 Diplomprüfung im Fach Betriebswirtschaftslehre WS 1973/74 - WS 1975/76 Mathematik an der Universität München
Berufliche Tätigkeit:	seit 1. November 1973 Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Seminar für Spezialgebiete der Statistik, Universität München

München, 2. November 1978